Sadržaj - Dio teorije i izabrani zadaci sa ispitnih rokova podjeljeni po oblastima (sva rješenja zadataka možete pronaći na web stranici http://ff.unze.ba/nabokov/)

1 Vektorski prostori i potprostori. **2**

2 Četri fundamentalna potprostora **4**

3 Linearna nezavisnost. **6**

4 Baza i dimenzije **8**

5 Linearne transformacije **10**

6 Promjena baza i sličnost **14**

7 Invarijantni potprostori **16**

8 Vektorska norma **17**

9 Unitarni prostori **19**

10 Ortogonalni vektori **21**

11 Gram-Schmidtova procedura **22**

12 Komplementarni potprostori **25**

13 Ortogonalna dekompozicija **27**

14 Ortogonalne projekcije **30**

15 Svojestveni vektori i svojstvene vrijednosti **32**

Skripta je u fazi izrade, moguća je pojava štamparskih grešaka. Za uočene greške pisati na infoarrt@gmail.com

Namjena ovih zadataka koje ćete dobiti na času je sljedeća: 1. Na času nećemo detaljno pisati svu teoriju (potrebnu za zadatke sa vježbi), zato što se sva teorija nalazi na ovim papirima; 2. Svi zadaci koji se nalazi na ovim papirima su nekada bili na ispitu, tako da odmah imate primjere zadataka sa ispitnih rokova. Rješenja svih zadataka sa ovih papira možete skinuti sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/za_vjezbu/ ili potražiti na nekom od rokova sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/rokovi/linearnaAlgebra/

Za spremaje ispita iz ovog predmeta preporučujemo da prvo prevježbate nekoliko zadataka iz sveske sa vjažbi. U toj svesci sistematično su izabrani zadaci za čije razumjevanje ne treba uložiti velik napor. Bitno je napomenuti da zadaci na ovim papirima nisu poredani po težini.

1 Vektorski prostori i potprostori.

(1.01) Definicija vektorskog prostora

Skup $\mathcal{V}$ zovemo <u>*vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$</u> kada su na njemu definisane operacije vektorsko sabiranje i skalarno množenje koje zadovoljavaju sljedeće osobine.

(A1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$ za sve $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$. Ovu osobinu zovemo <u>*zatvorenost za vektorsko sabiranje*</u>.

(A2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ za svaki $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathcal{V}$.

(A3) Postoji element $\mathbf{0}\in\mathcal{V}$ takav da $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$.

(A4) Za svaki $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$, postoji element $(-\boldsymbol{x})\in\mathcal{V}$ takav da $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.

(A5) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$.

(Osobine (A1)-(A5) u stvari govore da je uređen par $(\mathcal{V},+)$ Abelova grupa.)

(M1) $\alpha\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$ za sve $\alpha\in\mathbb{F}$ i $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$. Ovu osobinu zovemo <u>*zatvorenost za skalarno množenje*</u>.

(M2) $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$ za sve $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ i svaki $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$.

(M3) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ za svaki $\alpha\in\mathbb{F}$ i sve $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}$.

(M4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$ za sve $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ i svaki $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$.

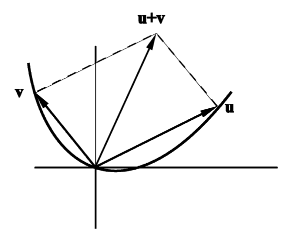
(M5) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ za svaki $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}$. ◇

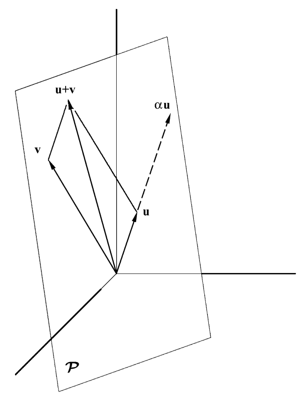
1. Neka je $\mathcal{L}=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|x_1+x_2=0,-x_1+2x_2+x_3=0\right\}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3$.

(1.02) Vektorski potprostor

Neka je $\mathcal{S}$ neprazan podskup vektorskog prostora $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$ (simbolički, $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{V}$). Ako je $\mathcal{S}$ također vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ sa istim operacijama sabiranja i skalarnog množenja, tada za $\mathcal{S}$ kažemo da je <u>*potprostor*</u> od $\mathcal{V}$. Nije potrebno provjeriti svih 10 osobina iz definicije vektorskog prostora da bi odredili da li je dati podskup vektorski potprostor - trebaju se provjeriti jedino osobine zatorenosti (A1) i (M1). Tj. neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je potprostor od $\mathcal{V}$ ako i samo ako vrijedi

(A1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}\Rightarrow\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathcal{S}$ i (M1) $\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}\Rightarrow\alpha\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}$ za sve $\alpha\in\mathbb{F}$. ◇



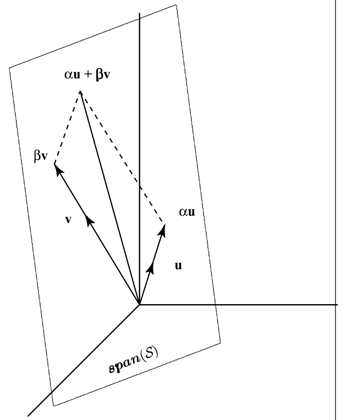


2. Neka je $\mathcal{V}=\mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1,a_2,...,a_n)^\top$ fiksirani vektor iz $\mathcal{V}$. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1,x_2,...,x_n)^\top$ iz $\mathcal{V}$ sa osobinom $a_1x_1+...+a_nx_n=0$ vektorski potprostor prostora $\mathcal{V}$. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M}=\{(x_1,x_2,...,x_n)^\top\in\mathcal{V}\,|\,a_1x_1+...+a_nx_n=0\}$$

vektorski potprostor od $\mathcal{V}$.

(1.03) Spljoštenost
Iako ne možemo koristiti oči da bi vidjeli "spljoštenost" u višim dimenzijama (u dimenzijama vektorskog prostora većem od 3), naš um to može sebi predstaviti kroz smisao potprostora. Od sad pa nadalje, uvijek zamislite spljoštenu površ koja prolazi kroz koordinatni početak kad god naiđemo na pojam "potprostora". ◇



3. Neka je $\mathcal{V}$ vektorski prostor svih matrica oblika 2×2 nad poljem realnih brojeva. Neka je $\mathcal{W}_1$ skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$$

a neka je $\mathcal{W}_2$ skup svih matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$$

Dokazati da su $\mathcal{W}_1$ i $\mathcal{W}_2$ potprostori od $\mathcal{V}$.

(1.04) Generatori
(i) Za skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_r\}$, potprostor

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_r\boldsymbol{v}_r : \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

generisan pomoću svih mogućih linearnih kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$ zovemo <u>prostor generisan pomoću $\mathcal{S}$</u>.
(ii) Ako je $\mathcal{V}$ vektorski prostor takav da $\mathcal{V} = span(\mathcal{S})$, kažemo da je $\mathcal{S}$ generator za $\mathcal{V}$. Drugim riječima $\mathcal{S}$ generiše $\mathcal{V}$ kadgod se svaki vektor iz $\mathcal{V}$ može napisati kao linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{S}$. ◇

4. Zadan je skup

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C}) \,|\, z_1 - 2\overline{z_2} + z_3 = 0, z_1 + \overline{z_2 + z_3} + z_4 = 0 \right\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{V}$ realni vektorski potprostor prostora $\text{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C})$.

(1.05) Suma potprostora
Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada je <u>suma</u> od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ definisana kao skup svih mogućih suma vektora iz $\mathcal{X}$ sa vektorima iz $\mathcal{Y}$. Tj.

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \text{ i } \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\}.$$

(i) Suma $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ je podprostor od $\mathcal{V}$.
(ii) Ako $\mathcal{S}_\mathcal{X}$, $\mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generišu redom $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ tada $\mathcal{S}_\mathcal{X} \cup \mathcal{S}_\mathcal{Y}$ generiše $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$. ◇

2 Četri fundamentalna potprostora

(2.01) Potprostori i linearne funkcije
Za linearnu funkciju f koja preslikava $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$, neka $\text{im}(f)$ označava <u>*kodomen*</u> (ili sliku) funkcije f. Tj. $\text{im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ je skup svih "slika" kad $\boldsymbol{x}$ uzima vrijednosti iz $\mathbb{R}^n$.
Rang svake linearne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je podprostor od $\mathbb{R}^m$, i svaki podprostor od $\mathbb{R}^m$ je rang neke linearne funkcije.
Zbog ovog razloga, podprostor od $\mathbb{R}^m$ se nekad zovu <u>*linearni prostori*</u>. ◇

(2.02) Slika prostor
<u>*Slika prostor*</u> matrice $A \in \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ je, definisan kao, podprostor $\text{im}(A)$ od $\mathbb{R}^m$, koji je generisan pomoću kodomena funkcije $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Tj.

$$\text{im}(A) = \{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Slično, slika od $A^\top$ je podprostor of $\mathbb{R}^n$ definisan sa

$$\text{im}(A^\top) = \{A^\top\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Kako je $\text{im}(A)$ skup svih "slika" vektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ pod transformacijom A, nekad se u literaturi $\text{im}(A)$ zove <u>*rang prostor*</u> od A. ◇

5. Diskutovati za koje vrijednosti parametra a i b će vektor $(4,3,2,1)^\top \in \mathbb{R}$ pripadati $\text{im}(A)$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ a & 0 & b & -1 \\ a & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

(2.03) Kolona i red prostor
Za $A \in \text{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sljedeće tvrdnje su tačne.
(i) $\text{im}(A)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A (kolona prostor).
(ii) $\text{im}(A^\top)$ = postor generisan pomoću redova matrice A (red prostor).
(iii) $\boldsymbol{b} \in \text{im}(A) \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$ za neki $\boldsymbol{x}$.
(iv) $\boldsymbol{a} \in \text{im}(A^\top) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}^\top = \boldsymbol{y}^\top A$ za neki $\boldsymbol{y}^\top$. ◇

6. Posmatrajmo vektorski potprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa $x_1 = (-1,0,1,2)^\top$, $x_2 = (1,2,-3,5)^\top$, $x_3 = (1,4,0,9)^\top$. Odrediti sistem homogenih linearnih jednačina za koji prostor rješenja je tačno potprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa tačno tri data vektora.

(2.04) Jednaki rang prostori
Za dvije matrice A i B istog oblika:
(i) $\text{im}(A^\top) = \text{im}(B^\top)$ ako i samo ako $A \overset{red}{\sim} B$.
(ii) $\text{im}(A) = \text{im}(B)$ ako i samo ako $A \overset{kol}{\sim} B$. ◇

(2.05) Generatori za red prostor i slika prostor
Neka je A matrica oblika $m \times n$, i neka je U matrica u red ešelon obliku dobijena iz A. Generatori za red i kolona prostor su sljedeći:
(i) Nenula redovi od U generišu $\text{im}(A^\top)$.
(ii) Osnovne kolone u A generišu $\text{im}(A)$. ◇

(2.06) Nulaprostor ili jezgro

(i) Za $m \times n$ matricu A, skup

$$\ker(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

zovemo _nulaprostor_ ili _jezgro_ matrice A. Drugim riječima, $\ker(A)$ je jednostavno skup svih rješenja homogenog sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(ii) Skup

$$\ker(A^\top) = \{\boldsymbol{y} \mid A^\top \boldsymbol{y} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

zovemo _naulaprostor sa lijeve strane_ matrice A, zato što je $\ker(A^\top)$ skup svih riješenja lijevog homogenog sistema $\boldsymbol{y}^\top A = \mathbf{0}^\top$. ⋄

7. Bez računanja determinante, odrediti da li kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 7 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Da li je matrica A singularna?

(2.07) Generator za nulaprostor

Da bi odredili generator skup za nulaprostor $\ker(A)$, gdje je $rang(A_{m\times n}) = r$, pomoću red operacija reduciramo matricu A na red ešelon oblik U, i onda riješimo sistem $U\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Osnovne varijable ćemo napisati pomoću slobodnih varijabli i time kreirati opšte rješenje sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ u obliku

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + ... + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}.$$

Prema definiciji skup $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, ..., \boldsymbol{h}_{n-r}\}$ generiše $\ker(A)$. Štaviše, može se dokazati da je $\mathcal{H}$ jedinstven u smislu da je $\mathcal{H}$ nezavisan od oblika red ešelon matrice U.
(Opisana procedura je specijalni slučaj Kroneker-Kapelijeve metode za rješavanje sistema linearnih jednačina, koja je poznata iz Uvoda u linearnu algebru). ⋄

(2.08) Nula nulaprostor

Ako je A $m \times n$ matrica, tada
(i) $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$ ako i samo ako $rang(A) = n$;
(ii) $\ker(A^\top) = \{\mathbf{0}\}$ ako i samo ako $rang(A) = m$;

(2.09) Nulaprostor sa lijeve strane

Ako je $rang(A_{m\times n}) = r$, i ako $PA = U$, gdje je P nesingularna i U je u red ešelon obliku, tada najmanje $m - r$ redova u P generišu lijevi nulaprostor matrice A. Drugim riječima, ako je $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ gdje je matrica P_2 oblika $(m - r) \times m$, tada

$$\ker(A^\top) = \mathrm{im}(P_2^\top).$$

8. Odrediti za koje vrijednosti nepoznate x će vektor $(0, 1, 1, 4)^\top \in \mathbb{R}^4$ pripadati $\mathrm{im}(A)$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \end{bmatrix}.$$

(2.10) Jednakost nulaprostora

Za dvije matrice A i B istog oblika
(i) $\ker(A) = \ker(B)$ ako i samo ako $A \overset{red}{\sim} B$.
(ii) $\ker(A^\top) = \ker(B^\top)$ ako i samo ako $A \overset{kol}{\sim} B$. ⋄

(2.11) Sažetak

Četri fundamentalna podprostora pridružena matrice A su sljedeća.

- Rang ili kolona prostor: $\mathrm{im}(A) = \{A\boldsymbol{x}\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
- Red prostor ili rang prostor sa lijeve strane: $\mathrm{im}(A^\top) = \{A^\top\boldsymbol{y}\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Nulaprostor (ili jezgro): $\ker(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Nulaprostor sa lijeve strane: $\ker(A^\top) = \{\boldsymbol{y} \mid A^\top\boldsymbol{y} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Neka je P nesingularna matrica takva da je $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

- Generator skup za $\mathrm{im}(A)$ = osnovne kolone u A.
- Generator za $\mathrm{im}(A^\top)$ = nenula redovi u U.
- Generator za $\ker(A)$ = vektori h_i u opštem rješenju sistema $A\boldsymbol{x} = 0$.
- Generator za $\ker(A^\top)$ = najmanje $m - r$ redova iz P.

Ako su A i B istog oblika, tada

- $A \overset{red}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad \ker(A) = \ker(B) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{im}(A^\top) = \mathrm{im}(B^\top)$.
- $A \overset{kol}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \ker(A^\top) = \ker(B^\top)$. ⋄

3 Linearna nezavisnost.

(3.01) Linearna nezavisnost

Za skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ kažemo da je _linearno nezavisan skup_ kadgod je jedino rješenje homogene jednačine

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

za skalare α_i trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Ako postoji netrivijalno rješenje za α-e (tj. najmanje jedan $\alpha_i \neq 0$) date homogene jednačine, skup $\mathcal{S}$ je _linearno zavisan skup_. Drugim riječima, linearno nezavisni skupovi su oni koji ne sadrže zavisne relacije, i linearno zavisni skupovi su oni skupovi u kojima je najmanje jedan vektor kombinacija svih osalih. Po dogovoru prazan skup je uvijek linearno nezavisan. ⋄

9. Neka je $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3$, te mu odrediti bazu i dimenziju.

(3.02) Linearna nezavisnost i matrice

Neka je A $m \times n$ matrica.

(i) Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

▷ $ker(A) = \{\mathbf{0}\}$.

▷ $rang(A) = n$.

(ii) Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da redovi matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

▷ $ker(A^\top) = \{\mathbf{0}\}$.

▷ $rang(A) = m$.

(iii) Kada je A kvadratna matrica, svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da je A nesingularna.

▷ Kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

▷ Redovi matrice A formiraju linearno nezavisan skup. ◇

10. Neka je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1, a_2, ..., a_n)^\top$ fiksirani vektor iz $\mathcal{V}$. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ iz $\mathcal{V}$ sa osobinom $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ vektorski potprostor prostora $\mathcal{V}$. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathcal{V} \,|\, a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$$

vektorski potprostor od $\mathcal{V}$. Odrediti bazu i dimenziju ovog potprostora.

(3.03) Najveći nezavisi podskupovi

Ako je $rang(A_{m\times n}) = r$, tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) Najveći nezavisni podskup kolona koji se može izvući iz A sadrži tačno r kolona.

(ii)Najveći nezavisni podskup redova koji se može izvući iz A sadrži tačno r redova.

(iii) Među ostalim mogućnostima za odabir, r osnovnih kolona iz A sadrže jedan najveći nezavisni podskup kolona iz A. ◇

11. Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}^+$ (svih pozitivnih realnih brojeva) nad poljem $\mathbb{R}$, na kome su operacije sabiranja vektora i množenje vektora skalarom definisane na sljedeći način

$$\text{vektorsko sabiranje: } \forall u, v \in \mathbb{R}^+ \quad u + v = uv;$$

$$\text{množenje skalarom: } \forall u \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha u = u^\alpha.$$

Odrediti bazu i dimenziju ovog vektorskog prostora. Odgovor obrazložiti.

(3.04) Osnovne tvrdnje o nezavisnosti

Za neprazan skup vektora $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ u vektorskom prostoru $\mathcal{V}$, sljedeće tvrdnje su tačne.

(i) Ako $\mathcal{S}$ sadrži linearno zavisan podskup, tada i sam $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan.

(ii) Ako je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan, tada je i svaki podskup od $\mathcal{S}$ također linearno nezavisan.

(iii) Ako je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan i ako je $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, tada produženi skup $\mathcal{S}_{prod} = \mathcal{S} \cup \{\boldsymbol{v}\}$ je također linearno nezavisan ako i samo ako $\boldsymbol{v} \notin span(\mathcal{S})$.

(iv) Ako je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ i ako je $n > m$, tada $\mathcal{S}$ mora biti linearno zavisan. ◇

12. U $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ zadani su potprostori

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a - 2b = 0, \; a + c + d = 0 \right\} \text{ i}$$

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + c = 0, \; a - 2b + d = 0 \right\}.$$

Odrediti po jednu bazu za $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ i $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

4 Baza i dimenzije

(4.01) Baza

Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor $\mathcal{V}$ zovemo baza za $\mathcal{V}$. ◇

13. Neka je $\mathcal{V}$ vektorski prostor svih matrica oblika 2×2 nad poljem realnih brojeva. Neka je $\mathcal{W}_1$ skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$$

a neka je $\mathcal{W}_2$ skup svih matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$$

(a) Dokazati da su $\mathcal{W}_1$ i $\mathcal{W}_2$ potprostori od $\mathcal{V}$.

(b) Odrediti bazu i dimenziju od $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ i $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

(4.02) Karakterizacija baze

Neka je $\mathcal{V}$ podprostor od $\mathbb{R}^m$, i neka je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n\} \subseteq \mathcal{V}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.

- $\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{V}$.
- $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generiše $\mathcal{V}$.
- $\mathcal{B}$ je najveći linearno nezavisan podskup iz $\mathcal{V}$. ◇

14. Zadan je skup

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C}) \,|\, z_1 - 2\overline{z_2} + z_3 = 0, z_1 + \overline{z_2 + z_3} + z_4 = 0 \right\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{V}$ realni vektorski potprostor prostora $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C})$ te mu nađite neku bazu i odredite dimenziju.

Namjena ovih zadataka koje ćete dobiti na času je sljedeća: 1. Na času nećemo detaljno pisati svu teoriju (potrebnu za zadatke sa vježbi), zato što se sva teorija nalazi na ovim papirima; 2. Svi zadaci koji se nalazi na ovim papirima su nekada bili na ispitu, tako da odmah imate primjere zadataka sa ispitnih rokova. Rješenja svih zadataka sa ovih papira možete skinuti sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/za_vjezbu/ ili potražiti na nekom od rokova sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/rokovi/linearnaAlgebra/

Za spremaje ispita iz ovog predmeta preporučujemo da prvo prevježbate nekoliko zadataka iz sveske sa vježbi. U toj svesci sistematično su izabrani zadaci za čije razumjevanje ne treba uložiti velik napor. Bitno je napomenuti da zadaci na ovim papirima nisu poredani po težini.

(4.03) Dimenzija

Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je definisana sa

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{V} &= \text{broj vektora u bilo kojoj bazi od } \mathcal{V}\\ &= \text{broj vektora u najmanjem skupu koji generiše } \mathcal{V}\\ &= \text{broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu iz } \mathcal{V}.\end{aligned}$$

◇

15. U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je potprostor $\mathcal{M}$ razapet (generisan) vektorima $(0,0,1,0,0)^\top$ i $(0,1,0,1,0)^\top$ i potprostor

$$\mathcal{L} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

(a) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$.
(b) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ i $\mathcal{M} + \mathcal{L}$.

(4.04) Dimenzije podprostora

Za vektorske prostore $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takve da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, sljedeće tvrdnje su tačne.

- $\dim\mathcal{M} \leq \dim\mathcal{N}$.
- Ako je $\dim\mathcal{M} = \dim\mathcal{N}$, tada je $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

◇

16. Neka je $\mathcal{V}$ vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ generisan vektorima x_1, x_2, x_3 (x_1, x_2 i x_3 su linearno nezavisni vektori)

$$\mathcal{V} = \text{span}\left\{ x_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

Ovo znači da za $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists$ jedinstveni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.d. $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Sa $\mathcal{V}^*$ označimo skup svih linearnih preslikavanja sa $\mathcal{V}$ u $\mathbb{R}$ tj.

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R}) = \{T : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \mid T \text{ je linearno}\}$$

i za svako $j \in \{1,2,3\}$ definišimo $T_j \in \mathcal{V}^*$ sa

$$T_j(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = a_j$$

(a) Pokazati da je $\mathcal{B}^* = \{T_1, T_2, T_3\}$ baza za $\mathcal{V}^*$.
(b) Odrediti T_1, T_2 i T_3.

Napomena: Rješenja za (a) i (b) su nezavisna jedno od drugog. Prostor $\mathcal{V}^*$ se naziva dualni prostor prostora $\mathcal{V}$, a baza $\mathcal{B}^*$ se naziva dualna baza baze $\mathcal{B}$.

(4.05) Fundamentalni podprostori - dimenzija i baze

Za $m \times n$ matricu realnih brojeva takvu da $rang(A) = r$,

- $\dim \text{im}(A) = r$,
- $\dim \ker(A) = n - r$,
- $\dim \text{im}(A^\top) = r$,
- $\dim \ker(A^\top) = m - r$.

Neka je P nesingularna matrica takva da je $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, i neka je $\mathcal{H}$ skup od $\boldsymbol{h}_i$-ova koji se pojavljuju u opštem rješenju homogenog sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

- Osnovne kolone u A formiraju bazu za $\text{im}(A)$.
- Nenula redovi od U formiraju bazu za $\text{im}(A^\top)$.
- Skup $\mathcal{H}$ je baza za $\ker(A)$.
- Zadnjih $m - r$ redova od P formira bazu za $\ker(A^\top)$.

Za matricu sa kompleksnim vrijednostima, tvrdnje iznad ostaju tačne ako $A^\top$ zamjenimo sa A^*. ◇

17. Prva četri Lagranžova polinoma su 1, $1-t$, $2-4t+t^2$ i $6-18t+9t^2-t^3$. Pokazati da ovi polinomi formiraju bazu vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3$ je skup svih polinoma stepena manjim ili jednakim od 3). Odrediti polinom $q \in \mathcal{P}_3$ takav da je $[q]_\mathcal{B} = (-2,0,1,0)^\top$ ako je $\mathcal{B}$ baza sastavljena od četri data Lagranžova polinoma.

(4.06) Slika plus jezgro teorem

- $\dim \text{im}(A) + \dim \ker(A) = n$ za sve $m \times n$ matrice.

◇

18. Dokazati da je $\mathcal{V} = \{A \in \text{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,|\, \text{trag}(A) = 0\}$ vektorski potprostor prostora $\text{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ (gdje je $\text{trag}(A) =$ suma dijagonalnih elemenata matrice A). Odrediti mu bazu i dimenziju. Nadopunite nađenu bazu do baze za $\text{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

(4.07) Rang i povezanost

Neka je Γ graf koji sadrži m vrhova. Ako je Γ neorjentisan, proizvoljno dodjeljivanje strelica na ivice grafa napravit će od Γ-e orjentisan graf, i neka je E matrica incidencije dobijenog orjentisanog grafa.

- Γ je povezan graf ako i samo ako $\text{rang}(E) = m - 1$.

◇

19. U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ($\mathbb{R}^\mathbb{N} = \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...) \,|\, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \,|\, a_{n+2} - 2a_n = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ i odrediti mu bazu i dimenziju.

(4.08) Dimenzija sume

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada

$$\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \dim\mathcal{X} + \dim\mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}).$$

◇

5 Linearne transformacije

(5.01) Linearne transformacije

Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ (za nas to je polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$).

- *Linearna transformacija* sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je definisana kao linearna funkcija T koja preslikava $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$. Tj.

$$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \quad \text{i} \quad T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$$

ili ekvivalentno

$$T(\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \quad \text{za sve } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{U},\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

- *Linearni operator* na $\mathcal{U}$ je definisana kao linearna transformacija sa $\mathcal{U}$ u sebe, tj., linearna funkcija koja preslikava $\mathcal{U}$ nazad u $\mathcal{U}$.

◇

20. Zadan je linearni operator $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ svojom matricom $T = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi

$\{\vec{i},\vec{j}\}$. Neka su $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$.

(a) Odrediti $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$.

(b) Za koje $\alpha\in\mathbb{R}$ su vektori $T(\vec{a})$, $T(\vec{a}+\alpha\vec{b})$ kolinearni?

(5.02) Koordinate vektora

Neka je $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_n\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{U}$, i neka je $\boldsymbol{v}\in\mathcal{U}$. Koeficijente α_i u razlaganju $\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2+...+\alpha_n\boldsymbol{u}_n$ se zovu _koordinate od $\boldsymbol{v}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$_, i od sad pa nadalje, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ će označavati kolona vektor

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Oprez! Poredak je važan. Ako je $\mathcal{B}'$ permutacija od $\mathcal{B}$, tada je $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}'}$ odgovarajuća permutacija od $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$. ◇

21. Neka je $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$ matrica linearnog operatora T u kanonskoj bazi $\mathcal{S}$ (drugim riječima $[T]_{\mathcal{S}}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$ gdje je $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$). Odrediti matricu operatora T u bazi $\mathcal{S}'=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ (drugim riječima odrediti $[T]_{\mathcal{S}'}$).

(5.03) Prostor linearnih transformacija

• Za svaki par vektorskih prostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$, skup $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ svih linearnih transformacija sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

• Neka su $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,...,\boldsymbol{v}_n\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ i neka su B_{ji} linearne transformacije sa $\mathcal{U}$ u $\mathcal{V}$ definisane sa $B_{ji}(\boldsymbol{u})=\xi_j\boldsymbol{v}_i$, gdje je $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)^\top=[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$. To jest, izaberemo j^{tu} koordinatu od $\boldsymbol{u}$ i prikačimo je na $\boldsymbol{v}_i$.

▷ $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}=\{B_{ij}\}_{\substack{i=1,...,m\\ j=1,...,n}}$ je baza za $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

▷ $\dim\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})=(\dim\mathcal{U})(\dim\mathcal{V})$. ◇

22. Neka je φ linearna transformacija $\varphi:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}$ takva da $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=1$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=1$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=0$, $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$. Odrediti $\varphi\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

(5.04) Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,...,\boldsymbol{v}_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. _Matrica koordinata_ od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}|&|&&|\\ [T(\boldsymbol{u}_1)]_{\mathcal{B}'}&[T(\boldsymbol{u}_2)]_{\mathcal{B}'}&\dots&[T(\boldsymbol{u}_n)]_{\mathcal{B}'}\\ |&|&&|\end{pmatrix}.$$

Drugim riječima, ako je $T(\boldsymbol{u}_j)=\alpha_{1j}\boldsymbol{v}_1+\alpha_{2j}\boldsymbol{v}_2+...+\alpha_{mj}\boldsymbol{v}_m$, tada

$$[T(\boldsymbol{u}_j)]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \alpha_{2j}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}\end{pmatrix}\quad\text{i}\quad[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}.$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, i kada je samo jedna baza u igri, umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ da označi (kvadratnu) matricu koordinata od T u odnosu na $\mathcal{B}$. ◇

23. Zadana je linearna transformacija $T:\mathcal{P}_2\longrightarrow\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$:

$$T(p)=\begin{pmatrix}p(0)&p(-1)\\p(1)&p(2)\end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$) u odnosu na par $(\mathcal{S},\mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$, te mu odredite po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q\in\mathcal{P}_2$ takav da je $T(q)=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

(5.05) Djelovanje kao množenje matricom

Neka je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za svako $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$, djelovanje od T na $\boldsymbol{u}$ je dato pomoću množenja matrice sa koordinatama u smislu da

$$[T(\boldsymbol{u})]_{\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}}$$

◇

24. Zadan je linearni operator $T:\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ sa

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a-b&-a+b+2c\\a-c-d&-a+2c+d\end{bmatrix}.$$

(a) Odrediti po jednu bazu za $\ker(T)$ i $\mathrm{im}(T)$.

(b) Odredite matricu koordinata od T u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Namjena ovih zadataka koje ćete dobiti na času je sljedeća: 1. Na času nećemo detaljno pisati svu teoriju (potrebnu za zadatke sa vježbi), zato što se sva teorija nalazi na ovim papirima; 2. Svi zadaci koji se nalazi na ovim papirima su nekada bili na ispitu, tako da odmah imate primjere zadataka sa ispitnih rokova. Rješenja svih zadataka sa ovih papira možete skinuti sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/za_vjezbu/ ili potražiti na nekom od rokova sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/rokovi/linearnaAlgebra/

Za spremaje ispita iz ovog predmeta preporučujemo da prvo prevježbate nekoliko zadataka iz sveske sa vježbi. U toj svesci sistematično su izabrani zadaci za čije razumjevanje ne treba uložiti velik napor. Bitno je napomenuti da zadaci na ovim papirima nisu poredani po težini.

(5.06) Veza sa algebrom matrica

- Ako su $T, L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, i ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ tada
  - ▷ $[\alpha T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \alpha [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ za sve skalare α,
  - ▷ $[T + L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

- Ako su $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i $L \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, i ako su $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$, redom, baze za $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ tada $LT \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$, i
  - ▷ $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

- Ako je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ invertibilna u smislu da $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ za neki $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ tada za svaku bazu $\mathcal{B}$ iz $\mathcal{U}$
  - ▷ $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$. ◇

25. Dat je operator $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ svih polinoma sa realnim koeficijentima i stepenom najviše 3, gdje, za svaki polinom $p(x)$ iz $\mathcal{P}_3$, je definisan na sljdeći način

$$T(p(x)) = xp'(x)$$

tj. proizvod x-a sa izvodom $p'(x)$ polinoma $p(x)$. Pokazati da je T linearni operator. Odrediti matricu (koordinata) A za operator T u odnosu na bazu $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i izračunati $A[q(x)]_{\mathcal{B}}$ gdje je $q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$.

26. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a - 2b & b + c \\ -2a - 4c & -2a + 4b \end{pmatrix}$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odrediti matricu koordinata $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$ gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$' redom standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$) te odredite po jednu bazu za jezgru i sliku od T ($\mathcal{P}_2$ je prostor realnih polinoma stepena ≤ 2).

27. Dat je linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definisan na sljedeći način

$$A(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + y \\ 0 \\ y - z \end{bmatrix}$$

(a) Odrediti njegovu sliku i jezgru, te njihove baze.
(b) Ako je $\mathcal{L} = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y\}$ i

$$\mathcal{M} = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, A(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) \in \mathcal{L} \}$$

odrediti $\mathcal{M}$ kao i bazu za taj skup.

28. Zadano je preslikavanje $T : V^3(0) \longrightarrow V^3(0)$ izrazom

$$T(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = (a - 2b + c)\vec{i} + 3a\vec{j} - (2a - 4c)\vec{k}.$$

Dokazati da je T linearni operator i odredite mu matrični prikaz u bazi $\mathcal{B} = \{\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + \vec{k}\}$ (drugim riječima odredite $[T]_{\mathcal{B}}$).

29. U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...) \,|\, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, a_{n+2} - 2a_n = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokazati da je preslikavanje $T : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ koje nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pridružuje niz $(a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ (tj. niz sa općim članom a_{n+2}) linearni operator. Odrediti matricu operatora T (matricu koordinata) u bazi $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, ...), (0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, ...)\}$.

30. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_3 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = \begin{bmatrix} a_0 + a_3 - a_2 & a_0 + 2a_1 - a_2 \\ a_3 & a_0 - a_2 \end{bmatrix}$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza, te joj odredite $\ker(T)$, $\mathrm{im}(T)$, rang $\rho(T)$ i defekt $\delta(T)$ (rang i defekt linearnog preslikavanja T označavamo redom sa $\rho(T)$ i $\delta(T)$ i definišemo na sljedeći način $\rho(T) := \dim \mathrm{im}(T)$, $\delta(T) := \dim \ker(T)$). ($\mathcal{P}_3$ je prostor svih polinoma stepena ≤ 3).

6 Promjena baza i sličnost

(6.01) Promjena koordinata vektora

Neka su $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ baze za $\mathcal{V}$, i neka su T i P, redom, pridruženi operator za promjenu baze i matrica za promenu baze, tj. $T(\boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{x}_i$ za svaki i, i

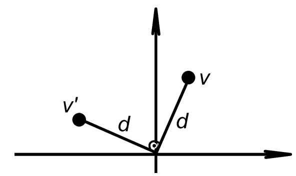
$$P = [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [\boldsymbol{x}_1]_{\mathcal{B}'} & [\boldsymbol{x}_2]_{\mathcal{B}'} & ... & [\boldsymbol{x}_n]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Tada

- $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}'} = P[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.
- P je nesingularna matrica.
- Ni jedna druga matrica se ne može koristiti umjesto $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. ◇

31. Neka je R rotacija, za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak, koja preslikava svaku tačku $v \in \mathbb{R}^2$ u odgovarajuću tačku $v' \in \mathbb{R}^2$ kao što je prikazano na slici desno.

a) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na standardnu bazu.
b) Odrediti rotaciju tačke $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ za ugao od 90° čiji je centar rotacije koordinatni početak.
c) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na bazu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.



(6.02) Promjena matričnih koordinata

Neka je A linearni operator na $\mathcal{V}$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za $\mathcal{V}$. Koordinatne matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ i $[A]_{\mathcal{B}'}$ su povezane na sljedeći način.

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P, \qquad \text{gdje je} \qquad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$. Ekvivalentno

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q, \qquad \text{gdje je} \qquad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$. ◇

32. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^2$ preslikava osnom simetrijom s osom u pravoj $y = x$ u vektor v' (vidi sliku). (Drugim riječima T je osna simetrija s osom u pravoj $y = x$).

(a) Odrediti matricu koordinata T u odnosu na standardnu bazu.

(b) Odrediti (koordinate) osnu simetriju tačke $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ s osom u pravoj $y = x$.

(c) Odrediti koordinate osne simetrije T (odrediti matricu operatora T) u odnosu na bazu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(6.03) Sličnost

• Za matrice $B_{n\times n}$ i $C_{n\times n}$ kažemo da su <u>*slične matrice*</u> kadgod postoji nesingularna matrica Q takva da $B = Q^{-1}CQ$. Da bi označili da su matrice B i C slične pišemo $B \simeq C$.

• Linearni operator $f : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definisan sa $f(C) = Q^{-1}CQ$ zovemo <u>*transformacija sličnosti*</u>. ◇

33. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao $\pi/3$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y = x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B} = \{(1,1)^\top, (1,-1)^\top\}$. Odredite koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

(6.04) Očuvanje ranga

Množenje sa nesingularnom matricom ne mijenja rang. ◇

34. Neka je T linearan operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y = -x$, zatim ga rotira za ugao $\frac{\pi}{4}$ oko koordinatnog početka (oko izvorišta) u negativnom smjeru, te zatim reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y = x$. Naći matricu (matricu koordinata) operatora T u bazi $\mathcal{B} = \left\{ 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

35. Neka je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

matrica linearnog operatora $T : \mathcal{V}^2(0) \to \mathcal{V}^2(0)$ u kanonskoj bazi $\left\{ \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Odrediti matricu operatora T u bazi $\{\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{i} + 3\vec{j}\}$. Da li postoji vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}^2(0)$ takav da je $T(\vec{v}) = 3\vec{i} + 5\vec{j}$?

7 Invarijantni potprostori

(7.01) Invarijantni podprostori

• Neka je T linearni operator na $\mathcal{V}$. Za podprostor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ kažemo da je <u>*invarijantan podprostor*</u> pod T (u odnosu na operator T) kadgod je $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

• U ovakvim situacijama, T možemo posmatrati kao linearni operator na $\mathcal{X}$ zanemarujući sve ostalo u $\mathcal{V}$ i time ograničiti (restriktovati) T da djeluje samo na vektore iz $\mathcal{X}$. Od sad pa nadalje, ovakav <u>*restriktovan (sužen) operator*</u> ćemo označavati sa $T_{/\mathcal{X}}$. ◇

36. Odrediti sve potprostore prostora $\mathbb{R}^2$ koji su invarijantni u odnosu na $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(7.02) Invarijantni podprostori i predstavljanje pomoću matrice

Neka je T linearni operator na n-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{V}$, i neka su $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ..., $\mathbb{Z}$ podprostori od $\mathcal{V}$ redom sa dimenzijama r_1, r_2, ..., r_k i bazama $\mathcal{B}_\mathcal{X}$, $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$,...,$\mathcal{B}_\mathcal{Z}$. Dalje, pretpostavimo da je $\sum_i r_i = n$ i $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y} ... \cup \mathcal{B}_\mathcal{Z}$ je baza za $\mathcal{V}$.

• Podprostor $\mathcal{X}$ je invarijantan podprostor u odnosu na T ako i samo ako $[T]_\mathcal{B}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}, \quad \text{gdje je } A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}.$$

• Svi podprostori $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$,..., $\mathcal{Z}$, su invarijantni u odnosu na T ako i samo ako $[T]_\mathcal{B}$ ima blok-trougaoni oblik

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{r_2\times r_2} & ... & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & C_{r_k\times r_k} \end{pmatrix},$$

gdje je

$$A = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{X}}, \quad B = \left[T_{/\mathcal{Y}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{Y}}, \quad ..., \quad C = \left[T_{/\mathcal{Z}}\right]_{\mathcal{B}_\mathcal{Z}}.$$

◇

37. Zadan je operator $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a + bt + ct^2) = a + b + c + (a + 3b)t + (a - b + 2c)t^2$$

Odrediti sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na operator T.

Namjena ovih zadataka koje ćete dobiti na času je sljedeća: 1. Na času nećemo detaljno pisati svu teoriju (potrebnu za zadatke sa vježbi), zato što se sva teorija nalazi na ovim papirima; 2. Svi zadaci koji se nalazi na ovim papirima su nekada bili na ispitu, tako da odmah imate primjere zadataka sa ispitnih rokova. Rješenja svih zadataka sa ovih papira možete skinuti sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/za_vjezbu/ ili potražiti na nekom od rokova sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/rokovi/linearnaAlgebra/

Za spremaje ispita iz ovog predmeta preporučujemo da prvo prevježbate nekoliko zadataka iz sveske sa vježbi. U toj svesci sistematično su izabrani zadaci za čije razumjevanje ne treba uložiti velik napor. Bitno je napomenuti da zadaci na ovim papirima nisu poredani po težini.

(7.03) Trougaoni i dijagonalni blok oblici

Kada je T $n \times n$ matrica, sljedeće dvije tvrdnje su tačne.

- Matrica Q je nesingularna takva da

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & B_{r\times q} \\ \mathbf{0} & C_{q\times q} \end{pmatrix}$$

ako i samo ako prvih r kolona u Q generiše invarijantni podprostor u odnosu na T.

- Matrica Q je nesingularna takva da

$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{r_2\times r_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C_{r_k\times r_k} \end{pmatrix},$$

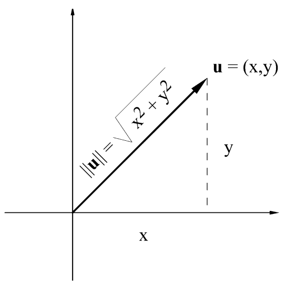
ako i samo ako $Q = (Q_1|Q_2|...|Q_k)$ gdje je Q_i oblika $n \times r_i$, i ako kolone od svake matrice Q_i generišu invarijantan podprostor u odnosu na T. ◇

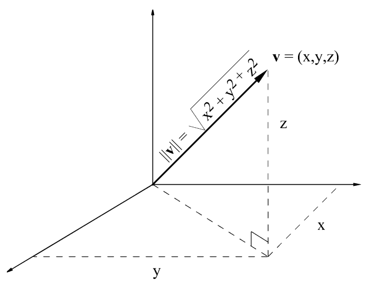
38. Zadan je linearni operator $T : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{pmatrix} a-b & 4a-4b \\ -a+2b+c & b+c \end{pmatrix}$$

Odrediti sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na operator T.

8 Vektorska norma



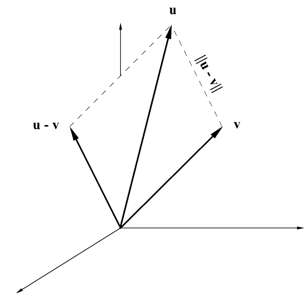


(8.01) Euklidova vektorska norma

Za vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (ili iz $\mathbb{C}^n$) ($\mathbb{R}^n$ tumačimo kao prostor kolona-matrica oblika $n \times 1$), <u>*euklidova norma*</u> od $\boldsymbol{x}$ je definisana sa

- $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x}}$ kadgod je $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,
- $\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x}}$ kadgod je $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. ◇

39. Izračunati 1-, 2- i ∞-norme vektora $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 1 \\ 4i \end{pmatrix}$.



(8.02) Standardni unutrašnji proizvod

Skalarni proizvod definisan sa

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \in \mathbb{C}$$

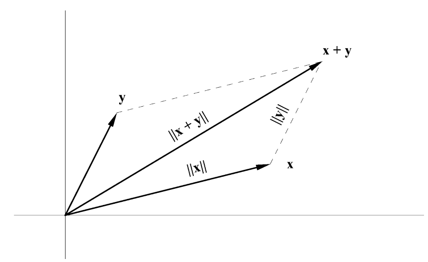
se zove <u>*standardni unutrašnji proizvod*</u> za $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$, redom. ◇

40. Ako je $x, y \in \mathbb{R}^n$ tako da $\|x+y\|_2 = \|x-y\|_2$, šta je $x^\top y$?

(8.03) Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz (CBS) nejednakost

$$|\boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y}| \le \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{za sve } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ za $\alpha = \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} / \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{x}$. ◇



(8.04) Nejednakost trougla

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{za svaki } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n.$$

◇

(8.05) p-norme

Za $p \geq 1$, p-norma vektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ je definisana sa $\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$. ◇

(8.06) Opšta vektorska norma

Norma za realni ili kompleksni vektorski prostor $\mathcal{V}$ je funkcija $\| \star \|$ koja preslikava $\mathcal{V}$ u $\mathbb{R}$ i zadovoljava sljedeće uslove:

$$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0 \quad \text{i} \quad \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\| \text{ za sve skalare } \alpha,$$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

◇

9 Unitarni prostori

(9.01) Opšti unutrašnji proizvod

Unutrašnji proizvod na realnom (ili kompleksnom) vektorskom prostoru $\mathcal{V}$ je funkcija koja preslikava svaki uređen par vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ u realan (ili kompleksan) skalar $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ takav da vrijede sljedeće osobine.

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ je realan, sa osobinama $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, i $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ akko $\boldsymbol{x} = 0$,

$\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ za svaki skalar α,

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle$,

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$ (za realan prostor, ovo postaje $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$).

Primjetimo da za svaku fiksiranu vrijednost od $\boldsymbol{x}$, druga i treća osobina kaže da je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ linearna funkcija po $\boldsymbol{y}$.

Bilo koji realan ili kompleksan vektorski prostor koji je opremljen sa unutrašnjim proizvodom se zove unitarni prostor. ◇

41. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m \times n$ matrica. Pokazati da je funkcija definisana sa

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$$

unutrašnji (skalarni) proizvod na prostoru $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(9.02) Opšta CBS nejednakost

Ako je $\mathcal{V}$ unutrašnji proizvod, i ako postavimo da je $\| \star \| = \sqrt{\langle \star, \star \rangle}$, tada

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{V}.$$

Jednakost važi ako i samo ako $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ za $\alpha = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle / \|\boldsymbol{x}\|^2$. ◇

42. Data je matrica $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. U $\mathbb{R}^n$ definišimo proizvod sa

$$\langle x, y \rangle = (Ax)^\top Ay$$

(a) Diskutovati za kakve matrice A je dati proizvod unutrašnji proizvod.
(b) Diskutovati za kakve matrice A, za dati proizvod vrijedi jednakost $\langle x, y \rangle = x^\top y$.

(9.03) Norme u unitarnom prostoru

Ako je $\mathcal{V}$ unitarni prostor sa unutrašnjim proizvodom $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, tada

$$\| \star \| = \sqrt{\langle \star, \star \rangle} \quad \text{definiše normu na } \mathcal{V}.$$

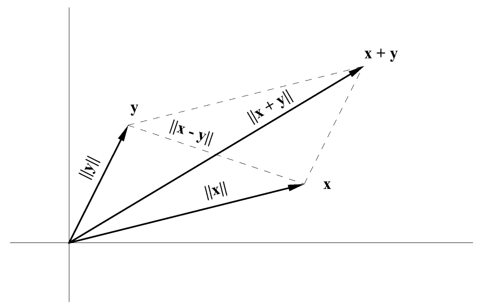
◇

(9.04) Jednakost paralelograma

Za datu normu $\| \star \|$ na vektorskom prostoru $\mathcal{V}$, postoji unutrašnji proizvod na $\mathcal{V}$ takav da $\langle \star, \star \rangle = \| \star \|^2$ ako i samo ako važi jednakost paralelograma

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)$$

za sve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$. ◇



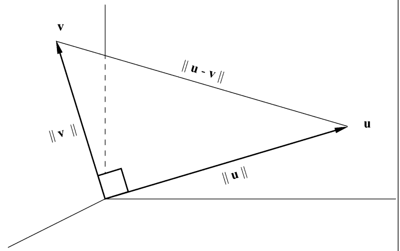
Namjena ovih zadataka koje ćete dobiti na času je sljedeća: 1. Na času nećemo detaljno pisati svu teoriju (potrebnu za zadatke sa vježbi), zato što se sva teorija nalazi na ovim papirima; 2. Svi zadaci koji se nalazi na ovim papirima su nekada bili na ispitu, tako da odmah imate primjere zadataka sa ispitnih rokova. Rješenja svih zadataka sa ovih papira možete skinuti sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/za_vjezbu/ ili potražiti na nekom od rokova sa stranice http://ff.unze.ba/nabokov/rokovi/linearnaAlgebra/

Za spremaje ispita iz ovog predmeta preporučujemo da prvo prevježbate nekoliko zadataka iz sveske sa vježbi. U toj svesci sistematično su izabrani zadaci za čije razumjevanje ne treba uložiti velik napor. Bitno je napomenuti da zadaci na ovim papirima nisu poredani po težini.

10 Ortogonalni vektori

(10.01) Ortogonalnost U unitarnom prostoru $\mathcal{V}$, za dva vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ kažemo da su *ortogonalna* (jedan na drugi) kadgod je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$, i ovo označavamo sa $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

- Za $\mathbb{R}^n$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} = 0$.
- Za $\mathbb{C}^n$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} = 0$.



43. Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

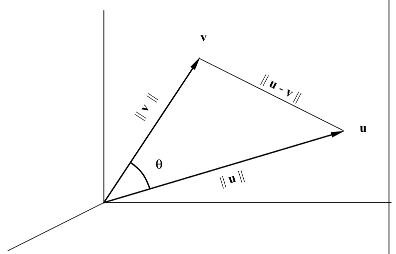
(*a*) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(*b*) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(*c*) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

(10.02) Uglovi U realnom unitarnom prostoru $\mathcal{V}$, ugao u radijanima između dva nenula vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ je definisan kao broj $\theta \in [0, \pi]$ takav da

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|}.$$



(10.03) Ortonormirani skupovi

Skup $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ se zove ortonormirani skup kadgod je $\|\boldsymbol{u}_i\| = 1$ za svaki i, i vrijedi $\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_j$ za sve $i \neq j$. Drugim riječima,

$$\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{kad je } i = j, \\ 0 & \text{kad je } i \neq j. \end{cases}$$

- Svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan.
- Svaki ortonormiran skup od n vektora iz n-dimenzionalnog prostora $\mathcal{V}$ je ortonormirana baza za $\mathcal{V}$. $\diamond$

(10.04) Furijer-ov razvoj

Ako je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ ortonormirana baza za unitarni prostor $\mathcal{V}$, tada svaki $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ se može izraziti kao

$$\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_1 + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_2 + ... + \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_n.$$

Ovo se zove *Furijerov razvoj* za $\boldsymbol{x}$. Skalare $\xi_i = \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x} \rangle$ su koordinate od $\boldsymbol{x}$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$, i njih zovemo *Furijeovi koeficijenti*. Geometriski, Furijerov razvoj razlaže x na n međusobno ortogonalnih vektora $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}_i$, od kojih svaki predstavlja ortogonalnu projekciju od $\boldsymbol{x}$ na prostor (liniju) generisanu sa $\boldsymbol{u}_i$. (Više o ovome je rečeno u lekciji Ortogonalne projekcije). $\diamond$

11 Gram-Schmidtova procedura

(11.01) Uvod u problem

Cilj: Iskoristiti datu bazu $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ i uz pomoć nje konstruisati ortonormiranu bazu $= \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ za $\mathcal{S}$.

Strategija: Postepeno konstruisati tako da je $_k = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_k\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{S}_k = span\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ za $k = 1, ..., n$. $\diamond$

(11.02) Gram-Schmidtov proces ortogonalizacije

Ako je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\}$ baza za neki unitarni prostor $\mathcal{S}$, tada <u>*Gram-Schmidtov niz*</u> definisan sa

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{x_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{u}_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x}_k \rangle \boldsymbol{u}_i}{\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{x}_k \rangle \boldsymbol{u}_i\|} \text{ za } k = 2, ..., n$$

je ortonormirana baza za $\mathcal{S}$. Kada je $\mathcal{S}$ n-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{C}^m$, Gram-Schmidtov niz se može izraziti sa

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{(I - U_k U_k^*)\boldsymbol{x}_k}{\|(I - U_k U_k^*)\boldsymbol{x}_k\|} \quad \text{za} \quad k = 1, 2, ..., n$$

gdje je $U_1 = \boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^m$ i $U_k = (\boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{u}_2 | ... | \boldsymbol{u}_{k-1})_{m \times k-1}$ za $k > 1$. $\diamond$

44. Dat je vektorski potprostor $\mathcal{L}$ vektorskog prostora $\text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definisan sa

$$\mathcal{L} = \{A \in \text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AX - XA = \boldsymbol{0}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\}.$$

Razmatrajući standardni unutrašnji proizvod za matrice $\langle A, B \rangle = \text{trag}(A^\top B)$ odrediti ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

(11.03) Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Sljedeći algoritam je direktna ili "klasična" implementacija Gram-Schmidtove procedure. Oznaka $a \leftarrow b$ znači da "a definiši da bude (ili postaje) b."

Za $k = 1$:

$$\boldsymbol{u}_1 \leftarrow \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}$$

Za $k > 1$:

$$\boldsymbol{u}_k \leftarrow \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{u}_i$$

$$\boldsymbol{u}_k \leftarrow \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

◇

45. Zadan je unitarni prostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle A, B\rangle = \mathrm{trag}(A^\top B)$ i neka je $\mathcal{L}$ vektorski potprostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ definiran kao

$$\mathcal{L} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nađite ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

(11.04) QR faktorizacija

Svaka matrica $A_{m\times n}$ sa linearno nezavisnim kolonama se može jedinstveno faktorisati kao $A = QR$ gdje su kolone od $Q_{m\times n}$ ortonormirana baza za $im(A)$ a $R_{n\times n}$ je gornje trougaona matrica sa pozitivnim dijagonalnim vrijednostima.

- QR faktorizacija je potpun "opis" Gram-Schmidtove procedure zato što su kolone od $Q = (\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_2|...|\boldsymbol{q}_n)$ dobijene kao rezultat primjene Gram-Schmidtovog procesa na kolone matrice $A = (\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|...|\boldsymbol{a}_n)$ a matrica R je data sa

$$R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \boldsymbol{q}_1^*\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{q}_1^*\boldsymbol{a}_3 & \dots & \boldsymbol{q}_1^*\boldsymbol{a}_n \\ 0 & \nu_2 & \boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{a}_3 & \dots & \boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{a}_n \\ 0 & 0 & \nu_3 & \dots & \boldsymbol{q}_3^*\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_n \end{bmatrix}$$

gdje je $\nu_1 = \|\boldsymbol{a}_1\|$ i $\nu_k = \|\boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{a}_k\rangle \boldsymbol{q}_i\|$ za $k > 1$. ◇

46. Dat je unitarni prostor $\mathcal{P}_3$, polinoma stepena ≤ 3, sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom

$$\langle p, q\rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} p(\lambda_i)q(\lambda_i)$$

gdje su $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$. Primjenom Gram-Schmidtovog procesa ortonormirati bazu $\{-1, x, -x^2, x^3\}$.

(11.05) Linearni sistemi i QR faktorizacija

Ako je $rang(A_{m\times n}) = n$, i ako je $A = QR$ dobijena QR faktorizacija, tada rješenje nesingularnog trougaonog sistema

$$R\boldsymbol{x} = Q^\top \boldsymbol{b}$$

je ili riješenje problema najmanjih kvadrata sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ili riješenje istog sistema u zavisnosti da li je $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saglasan sistem. ◇

47. Posmatrajmo realni unitarni prostor $\mathcal{P}_2$, gdje za polinome

$$p = p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 \quad \text{i} \quad q = q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2$$

je definisan unutrašnji proizvod na sljdeći način

$$\langle p, q\rangle = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2.$$

Provjeriti da li su polinomi

$$u_1 = 3 + 4x + 5x^2, \quad u_2 = 9 + 12x + 5x^2, \quad u_3 = 1 - 7x + 25x^2,$$

linearno nezavisni u $\mathcal{P}_2$, pa pomoću njih formirati ortonormiranu bazu za $\mathcal{P}_2$.

(11.06) Modifikovani Gram-Schmidtov algoritam

Za linearno nezavisan skup $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{C}^m$ Gram-Schmidtov niz dat u 11.02 se može napisati i na drugi način kao

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{E_k...E_2E_1\boldsymbol{x}_k}{\|E_k...E_2E_1\boldsymbol{x}_k\|} \quad \text{gdje je } E_1 = I,\ \ E_i = I - \boldsymbol{u}_{i-1}\boldsymbol{u}_{i-1}^* \text{ za } \ i > 1,$$

i ovaj niz je generisan pomoću sljedećeg algoritma:

Za $k = 1$: $\boldsymbol{u}_1 \leftarrow \boldsymbol{x}_1/\|\boldsymbol{x}_1\|$ i $\boldsymbol{u}_j \leftarrow \boldsymbol{x}_j$ za $j = 2, 3, ..., n$.

Za $k > 1$: $\boldsymbol{u}_j \leftarrow E_k\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{u}_j - (\boldsymbol{u}_{k-1}^*\boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_{k-1}$ za $j = k, k+1, ..., n$.
$\boldsymbol{u}_k \leftarrow \boldsymbol{u}_k/\|\boldsymbol{u}_k\|$. ◇

48. Zadan je linearni operator $T : \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (3a + 2c - d)x^3 + (3b - c - d)x^2 + (2a + b + c - d)x + (a + 2b - d)$$

Odrediti ortonormiranu bazu za $\mathrm{im}(T)$ (Koristiti standardni unutrašnji proizvod u $\mathcal{P}_3$ definisan sa $\langle a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\rangle = a_3b_3 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$).

(11.07) Sažetak

- Kada Gram-Schmidtov proces (klasičan ili modifikovan) primjenimo na kolone matrice A koristeći tačnu aritmetiku, svaki put dobijamo ortonormiranu bazu za $im(A)$.
- Za računanje QR faktorizacije u aritmetici pokretnog zareza, modifikovani algoritam proizvodi rezultate koji su dovoljno dobri a često i bolji od klasičnog algoritma, ali modificirani algoritam nije bezuslovno stabilan - postoje situacije u kojima će proizvesti skup kolona koje nisu ni približno ortogonalne.
- Za rješenje problema najmanjeg kvadrata sa aritmetikom pokretnog zareza, modificirana procedura je numerički stabilan algoritam u smislu da metoda opisana u jednom od primjera vraća rezultat koji je tačno rješenje susjednog problema najmanjih kvadrata. Kakogod, Hauseholderova metoda (koju nismo radili ali možete tražiti papire da kopirate od predmetnog nastavnika ili predmetnog asistenta) je dovoljno stabilna a potrebno joj je dosta manje aritmetičkih operacija. ◇

49. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim proizvodom ortonormirati skup

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

12 Komplementarni potprostori

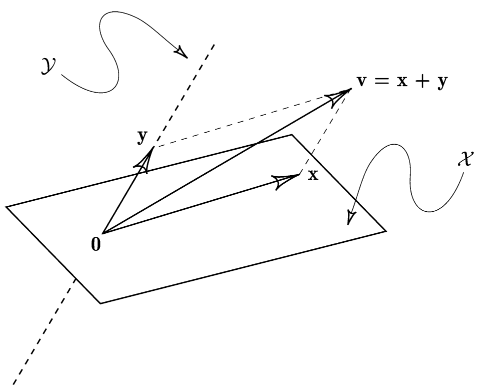
(12.01) Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su *komplementarni* podprostori kadgod je

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad \text{i} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathbf{0},$$

i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je *direktna suma* od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. (Suma podprostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ je prema definiciji skup $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \text{ i } \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}\}$.)

- Za vektorski prostor $\mathcal{V}$ sa podprostorima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ koji imaju redom baze $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ i $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.
  - ▷ $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.
  - ▷ Za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ takvi da $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.
  - ▷ $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset$ i $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$ je baza za $\mathcal{V}$. ◇



50. Dat je vektorski potprostor $\mathcal{M}$ prostora $\mathbb{R}^4$ definisan sa

$$\mathcal{M} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \,|\, z_1 + 2z_2 + z_3 = 0,\ 2z_1 + z_2 - z_3 = 0,\ z_1 + 5z_2 + 4z_3 = 0\}.$$

Odrediti mu jedan (direktni) komplement (koji nije ortogonalni komplement).

(12.02) Projekcija

Pretpostavimo da je $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ tako da za svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni vektori $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$ takvi da $v = x + y$.

- Vektor $\boldsymbol{x}$ zovemo *projekcija* od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$.
- Vektor $\boldsymbol{y}$ zovemo projekcija od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$. ◇

51. U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je potprostor $\mathcal{M}$ razapet (generisan) vektorima $(0,0,1,0,0)^\top$ i $(0,1,0,1,0)^\top$ i potprostor

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

(a) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$.
(b) Odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$.
(c) Odrediti neku bazu za (direktni) komplement prostora $\mathcal{L}$ (koji nije ortogonalni komplement).

(12.03) Projektori

Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ komplementarni podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ tako da se svaki $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ može na jedinstven način prikazati kao suma $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ i $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$. Jedinstveni linearni operator P definisan sa $P\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$ zovemo *projektor na $\mathcal{X}$ paralelno sa $\mathcal{Y}$*, i P ima sljedeće osobine.

- $P^2 = P$ (P je idempotent).
- $I - P$ je komplementarni projektor na $\mathcal{Y}$ paralelno sa $\mathcal{X}$.
- $\operatorname{im}(P) = \{\boldsymbol{x} \,|\, P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ (je skup "fiksiranih tački" za P).
- $\operatorname{im}(P) = \ker(I - P) = \mathcal{X}$ i $\operatorname{im}(I - P) = \ker(P) = \mathcal{Y}$.
- Ako je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$, tada je P dat sa

$$P = [X|\mathbf{0}][X|Y]^{-1} = [X|Y]\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}[X|Y]^{-1},$$

gdje su kolone od X i Y redom baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$. ◇

52. Neka je $Q : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3$ označava prostor svih polinoma stepena ≤ 3) linearni operator dat sa

$$Q(p) = \text{polinom stepena 2 čiji graf prolazi tačkama}(-1; p(-1)),\ (0; p(0)) \text{ i } (1; p(1)).$$

(a) Odrediti matricu operatora Q (matricu koordinata) u odnosu na standardnu bazu.
(b) Odrediti (direktni) komplement prostora $\ker(Q)$ (koji nije ortogonalni komplement).

(12.04) Projektori i idempotenti

Linearni operator P definisan na $\mathcal{V}$ je projektor ako i samo ako $P^2 = P$. ◇

53. Neka je

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \,|\, -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

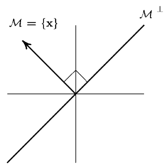
Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, odrediti mu bazu, dimenziju i neki direktni kompliment.

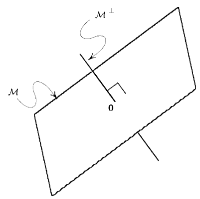
13 Ortogonalna dekompozicija

(13.01) Ortogonalni komplement
Za podskup M unitarnog prostora $\mathcal{V}$, ortogonalni komplement $\mathcal{M}^{\perp}$ (čitaj "M nor") od $\mathcal{M}$ je definisan kao skup svih vektora iz $\mathcal{V}$ koji su ortogonalni na svaki vektor iz $\mathcal{M}$. To jest

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{x \in \mathcal{V} \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za svaki } m \in \mathcal{M}\}.$$

◇





54. Odrediti URV faktorizaciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

(13.02) Ortogonalno komplementarni podprostor
Ako je $\mathcal{M}$ podprostor konačno dimenzionalnog unitarnog podprostora $\mathcal{V}$, tada je

$$\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}.$$

Štaviše, ako je $\mathcal{N}$ podprostor takav da $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$ (svaki vektor u $\mathcal{N}$ je ortogonalan na svaki vektor u $\mathcal{M}$), tada

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\perp}.$$

◇

55. Baza vektorskog prostora $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, x_3)^{\top} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0, -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ je $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$. Odrediti mu jedan ortogonalni komplement (u odnosu na standardni unutrašnji (skalarni) proizvod $\langle x, y\rangle = x^{\top} y$).

(13.03) Nor operator
Ako je $\mathcal{M}$ podprostor konačno dimenzionalnog unitarnog podprostora dimenzije n, tada su sljedeće tvrdnje tačne

- $\dim(\mathcal{M}^{\perp}) = n - \dim(\mathcal{M})$.
- $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$ ◇

56. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx$ dat je potprostor

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{x^2 - 1, x + 1\}.$$

Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^{\perp}$, te nađite prikaz polinoma $p(x) = 2x^2 + x + 5$ u obliku sume $p = p_1 + p_2$, pri čemu je $p_1 \in \mathcal{M}$, $p_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$.

(13.03) Teorema ortogonalne dekompozicije
Za svaku matricu $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$im(A)^{\perp} = ker(A^{\top}) \quad \text{i} \quad ker(A)^{\perp} = im(A^{\top}).$$

Ako iskoristimo prvu osobinu iz 13.02 ovo znači da svaka matrica $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ pravi ortogonalnu dekompoziciju od $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$ u smislu da

$$\mathbb{R}^m = im(A) \oplus im(A)^{\perp} = im(A) \oplus ker(A^{\top}),$$

i

$$\mathbb{R}^n = ker(A) \oplus ker(A)^{\perp} = ker(A) \oplus im(A^{\top}),$$

◇

57. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa skalarnim proizvodom

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_4 y_4$$

zadan je potprostor $\mathcal{V}$ razapet (generisan) vektorima $v_1 = (1, 0, 1, 0)^{\top}$ i $v_2 = (1, 0, 1, 1)^{\top}$. Prikažite vektor $x = (4, 2, 2, 4)^{\top}$ u obliku $x = v + w$, gdje je $v \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{V}^{\perp}$.

(13.04) URV faktorizacija
Za svaku matricu $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ranga r postoje ortogonalne matrice $U_{m\times m}$ i $V_{n\times n}$ i nesingularna matrica $C_{r\times r}$ takve da

$$A = URV^{\top} = U \begin{pmatrix} C_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m\times n} V^{\top}.$$

- Prvih r kolona u U čine ortonormiranu bazu za $im(A)$.
- Zadnjih $m - r$ kolona u U čine ortonormiranu bazu za $ker(A^{\top})$.
- Prvih r kolona u V su ortonormirana baza za $im(A^{\top})$.
- Zadnjih $n - r$ kolona u V su ortonormiranu bazu za $ker(A)$.

Svaka različita familija ortonormiranih baza za četri fundamentalna podprostora od A proizvodi različitu URV faktorizaciju od A. U kompleksnom slučaju, $(\star)^{\top}$ mjenjamo sa $(\star)^{*}$ i "ortogonalno" mijenjamo sa "unitarno". ◇

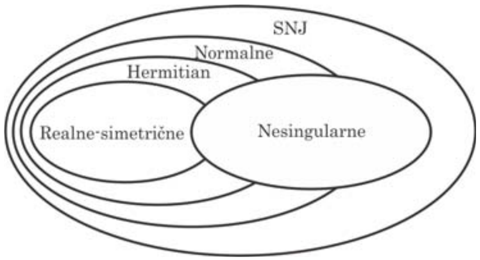
58. Neka je $\mathcal{M}$ potprostor unitarnog prostora $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generisan matricama $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Odredite jednu bazu za ortogonalni komplement od $\mathcal{M}$, te prikažite matricu $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ u obliku $X = Y_1 + Y_2$, gdje je $Y_1 \in \mathcal{M}$, a $Y_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$. (Standardni skalarni proizvod u $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je $\langle A, B\rangle = \mathrm{trag}(AB^{\top})$).

(13.05) Slika normalna na jezgro

Za $\text{rang}(A_{n\times n}) = r$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

- $\text{im}(A)\perp\ker(A)$,
- $\text{im}(A) = \text{im}(A^\top)$,
- $\ker(A) = \ker(A^\top)$,
- $A = U\begin{pmatrix} C_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}U^\top$

gdje je U ortogonalna a C nesingularna matrica. Ovakve matrice ćemo zvati *SNJ matrice* skraćenica od "slika normalna na jezgro". Neki autori ih nazivaju rang-simetrične ili EP ili RPN matrice. Nesingularne matrice su trivijalne SNJ matrice zato što je jezgro nula. U kompleksnom slučaju, $(\star)^\top$ mjenjamo sa $(\star)^*$ i "ortogonalno" mijenjamo sa "unitarno". ⋄



59. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3+bt^2+ct+d \,|\, a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ polinoma stepena ≤ 3 sa skalarnim proizvodom

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t$$

dat je potprostor $\mathcal{M} = \text{span}\{1+t, 1\}$. Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$.

60. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_4$ realnih polinoma stepena ≤ 4 dat je skup

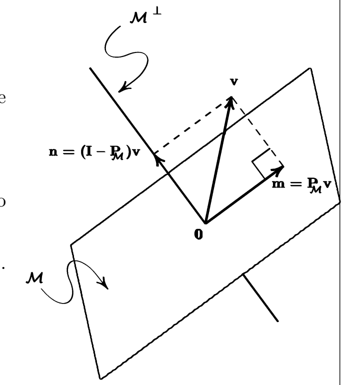
$$\mathcal{M} = \{p\in\mathcal{P}_4 \,|\, p'(0) = p(1),\ p''(0) = 2p(-1)\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{M}$ vektorski potprostor prostora $\mathcal{P}_4$, odredite mu jednu bazu i dimenziju, te jedan direktni komplement.

14 Ortogonalne projekcije

Ortogonalna projekcija Za $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}$, neka je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$, gdje je $\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}$ i $\boldsymbol{n}\in\mathcal{M}^\perp$.

- Vektor $\boldsymbol{m}$ zovemo *ortogonalna projekcija* od $\boldsymbol{v}$ na $\mathcal{M}$.
- Projektor $P_{\mathcal{M}}$ na $\mathcal{M}$ paralelno sa $\mathcal{M}^\perp$ zovemo *ortogonalni projektor* na $\mathcal{M}$.
- $P_{\mathcal{M}}$ je jedinstveni linearni operator takav da $P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{m}$.



61. Neka je $\mathcal{P}_2$ vektorski prostor svih realnih polinoma stepena ≤ 2,

$$\mathcal{P}_2 = \{ax^2+bx+c \,|\, a,b,c\in\mathbb{R}\}.$$

a) Provjeriti da li je sa $\langle p,q\rangle = p(1)q(1)+2p(0)q(0)+p(-1)q(-1)$ definiran unutrašnji (skalarni) proizvod na $\mathcal{P}_2$.
b) Za potprostor $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{P}_2$ generisan polinomima $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ odredite ortogonalni komplement.
c) Odredite ortogonalnu projekciju od $p(x) = -2x^2+x+2$ na $\mathcal{L}$.

(14.02) Konstrukcija ortogonalnog operatora

Neka je $\mathcal{M}$ r-dimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^n$, i neka su kolone od $M_{n\times r}$ i $N_{n\times n-r}$ redom baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$. Ortogonalni projektori na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$ su

- $P_{\mathcal{M}} = M(M^\top M)^{-1}M^\top$ i $P_{\mathcal{M}^\perp} = N(N^\top N)^{-1}N^\top$.

Ako M i N sadrže ortonormirane baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$, tada

- $P_{\mathcal{M}} = MM^\top$ i $P_{\mathcal{M}^\perp} = NN^\perp$
- $P_{\mathcal{M}} = U\begin{pmatrix} I_{r\times r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}U^\top$, gdje je $U = (M|N)$.
- $P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}}$ u svim slučajevima. ⋄

62. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim proizvodom, zadan je potprostor $\mathcal{M}$ razapet vektorima $(2,1,0,0)^\top$, $(1,1,1,1)^\top$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od $\mathcal{M}$ te odredite ortogonalnu projekciju vektora $a = (3,-4,5,-5)^\top$ na $\mathcal{M}$.

(14.03) Ortogonalni projektori

Pretpostavimo da je $P\in\text{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ projektor, tj. $P^2 = P$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne tvrdnji: P je ortogonalni projektor.

- $\text{im}(P)\perp\ker(P)$.
- $P^\top = P$ (tj., ortogonalni projektor $\Leftrightarrow P^2 = P = P^\top$).
- $\|P\|_2 = 1$ za matričnu 2-normu.

(Prisjetimo se matrična 2-norma, matrice A, je definisana $\|A\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1}\|A\boldsymbol{x}\|_2$). ⋄

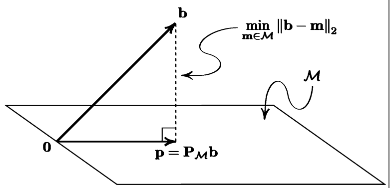
63. Neka je $\mathcal{M} = \operatorname{span}\{a, b\}$ potprostor unitarnog prostora $\mathbb{R}^n$ (sa standardnim skalarnim proizvodom) razapet (generisan) vektorima $a = (0, 1, 2, ..., n-1)^\top$ i $b = (1, 1, 1, ..., 1)^\top$. Odrediti njegov ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ te odredite ortogonalnu projekciju od z na $\mathcal{M}$ gdje je

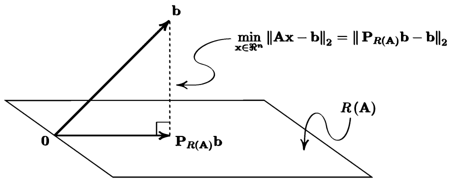
$$z = (\frac{1}{2}n(3-n), \frac{1}{2}n(n-1), 0, 0, ..., 0)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

(14.04) Teorema o najbližoj tački Neka je $\mathcal{M}$ podprostor unitarnog prostora $\mathcal{V}$, i neka je $\boldsymbol{b}$ vektor u $\mathcal{V}$. Jedinstveni vektor u $\mathcal{M}$ koji je najbliži vektoru $\boldsymbol{b}$ je $\boldsymbol{p} = P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{b}$, ortogonalna projekcija od $\boldsymbol{b}$ na $\mathcal{M}$. Drugim riječima,

$$\min_{\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}} \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{m}\|_2 = \|\boldsymbol{b} - P_{\mathcal{M}}\boldsymbol{b}\|_2 = udaljenost(\boldsymbol{b}, \mathcal{M}).$$

Ovo se zove *ortogonalna udaljenost* između $\boldsymbol{b}$ i $\mathcal{M}$.





64. Odrediti ortogonalnu projekciju vektora $x = (-12, -13, 5, 2)^\top$ na prostor $\mathcal{M}$ ako je

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(s obzirom na standardni skalarni proizvod).

65. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3 + bt^2 + ct + d \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena ≤ 3 sa unutrašnjim proizvodom

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t$$

dat je potprostor $\mathcal{M} = \operatorname{span}\{t, 1+t\}$. Odrediti ortogonalnu projekciju polinoma $r(t) = -5t^3 - 12t^2 + 6t + 6$ na potprostor $\mathcal{M}$.

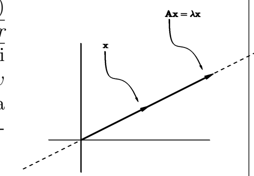
66. Prostor $\mathcal{L}$ je zadan kao skup rješenja sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad 3x_4 &= 0\\ 3x_1 + \quad 2x_2 + \quad 2x_3 + \quad x_4 &= 0\\ x_1 + \quad 2x_2 + \quad 2x_3 - \quad 9x_4 &= 0\ . \end{aligned}$$

Prikažite vektor $x = (7, -4, -1, 2)^\top$ u obliku $x = y + z$, pri čemu je $y \in \mathcal{L}$, a z iz ortogonalnog komplimenta od $\mathcal{L}$ u $\mathbb{R}^4$.

15 Svojestveni vektori i svojstvene vrijednosti

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori Neka je $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ skup svih $m \times n$ matrica čiji su elementi realni brojevi. *Svojstveni vektor* matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ je nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takav da $Av = \lambda v$ za neki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. *Svojstvena vrijednost* od A je skalar λ takav da $Av = \lambda v$ za neki nenula vektor $v \in \mathbb{R}^n$. Bilo koji takav par, (λ, v), se naziva *svojstveni par* matrice A. Skup svih različitih svojstvenih vrijednosti, označavamo sa $\sigma(A)$.



- $\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I$ je singularna $\iff \det(A - \lambda I) = 0$.
- $\{x \neq 0 \,|\, x \in \ker(A - \lambda I)\}$ je skup svih svojstvenih vektora pridruženih λ-di. Vektorski prostor $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I) := \{x \,|\, (A - \lambda I)x = 0\}$ se naziva *svojstveni prostor* matrice A.
- Za kvadratnu matricu A, broj $\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$ se naziva *spektralni prečnik* od A.

67. Odrediti svojstvene vrijednosti, svojstvene prostore, te algebarske i geometriske višestrukosti matrice A, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2\\ 4 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom i jednačina

- *Karakteristični polinom* matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Stepen od $p(\lambda)$ je n, i vodeći član u $p(\lambda)$ je $(-1)^n\lambda^n$.
- *Karakteristična jednačina* za A je $p(\lambda) = 0$.
- Svojstvena vrijednosti za A su rješenja karakteristične jednačine ili, ekvivalentno, korijeni karakterističnog polinoma.
- Iako matrica A ima n svojstvenih vrijednosti, neke svojstvene vrijednosti mogu biti kompleksni brojevi (čak iako su elementi matrice A realni brojevi), a neke svojstvene vrijednosti se mogu ponoviti.
- Ako matrica A sadrži samo realne brojeve, tada njezine kompleksne svojstvene vrijednosti se moraju pojaviti u konjugovanim parovima - tj., ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada je $\overline{\lambda} \in \sigma(A)$.

68. Data je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odrediti parametre a i b ako je poznato da je A singularna matrica čije sve svojstvene vrijednosti imaju algebarsku višestrukost 2.

Višestrukost Neka je $\sigma(A)$ skup svih (različitih) svojstvenih vrijednosti matrice A, i neka je $\lambda \in \sigma(A)$. *Algebarska višestrukost* od λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma matrice A). Drugim riječima, $\operatorname{alg\,mult}_A(\lambda_i) = a_i$ ako i samo ako je $(x - \lambda_1)^{a_1}...(x - \lambda_s)^{a_s} = 0$ karakteristična jednačina matrice A. U slučaju kada je $\operatorname{alg\,mult}_A(\lambda) = 1$, λ se naziva *jednostavna svojstvena vrijednost*. *Geometrijska višestrukost* od λ je $\dim\ker(A - \lambda I)$. Drugim riječima, $\operatorname{geo\,mult}_A(\lambda)$ je maksimalan broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih matrici λ.

(#) Neka je $\mathcal{L}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2=0,\ -x_1+2x_2+x_3=0\}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$, odrediti mu bazu i dimenziju.

Rj. Znamo da je neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je podprostor od $\mathcal{V}$ ako i samo ako vrijedi

(A1) $x,y\in \mathcal{S} \Rightarrow x+y\in \mathcal{S}$

(M1) $x\in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x\in \mathcal{S}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Da li je $\mathcal{L}$ neprazan skup?

$\mathcal{L}$ je neprazan zato što npr. $(1,-1,3)\in\mathcal{L}$

Za $\forall (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in\mathcal{L}$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ imamo

$$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)$$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=\underbrace{x_1+x_2}_{=0}+\underbrace{y_1+y_2}_{=0}=0 \qquad \dots(*)$$

$$-(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+(x_3+y_3)=$$

$$=\underbrace{-x_1+2x_2+x_3}_{=0}\ \underbrace{-y_1+2y_2+y_3}_{=0}=0 \qquad \dots(**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ vidimo da vrijedi (A1)

$$\alpha(x_1,x_2,x_3)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$$

$$\alpha x_1+\alpha x_2=\alpha\underbrace{(x_1+x_2)}_{=0}=0 \qquad \dots(\Delta)$$

$$-(\alpha x_1)+2(\alpha x_2)+(\alpha x_3)=\alpha\underbrace{(-x_1+2x_2+x_3)}_{=0}=0 \qquad \dots(\Delta\Delta)$$

Iz (Δ) i $(\Delta\Delta)$ vidimo da vrijedi (M1)

$\mathcal{L}$ jest vektorski podprostor od $\mathbb{R}^3$

Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor $\mathcal{V}$ zovemo baza za $\mathcal{V}$.

Ako je $\mathcal{V}$ podprostor od $\mathbb{R}^n$ tada:

$\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generiše $\mathcal{V}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najveći linearno nezavisan podskup od $\mathcal{V}$

Prostor $\mathcal{L}$ možemo zapisati i u drugačijem obliku

$$\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}=\ker\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}}_{=A}\Big)$$

$\mathcal{L}=\ker(A)$

Generator za $\ker(A)$ su linearno nezavisni vektori iz opšteg rješenja $Ax=0$.

$$\begin{aligned}x_1+x_2\quad &=0\\ -x+2x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\-1&2&1&0\end{array}\right]\overset{II_v+I_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&3&1&0\end{array}\right]\overset{II_v:3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1/3&0\end{array}\right]$$

$$\overset{I_v-II_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1/3&0\\0&1&1/3&0\end{array}\right]\Rightarrow$$ rang A = rang $\bar{A}<3$ = broj nepoznatih sistem ima ∞ mnogo rješenja i 1 nepoznatu uzimamo proizvoljno

$$\begin{aligned}x_1\quad -\tfrac{1}{3}x_3&=0\\ x_2+\tfrac{1}{3}x_3&=0\end{aligned} \qquad x_3=3t \qquad x_1=t \quad x_2=-t \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t\\3t\end{pmatrix}$$

Baza za $\mathcal{L}$ je $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$ i $\dim\mathcal{L}=1$. što je trebalo naći

$\dim\mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi za $\mathcal{V}$

Neka je $V=\mathbb{R}^n$ i neka je $(a_1,a_2,\dots,a_n)^T$ fiksirani vektor iz V. Dokazati da je familija svih elemenata $(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ iz V sa osobinom $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ vektorski podprostor prostora V. Drugim riječima da je

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in V \;\middle|\; a_1x_1+\dots+a_nx_n=0\right\}$$

vektorski podprostor od V. Odrediti dimenziju i bazu ovog podprostora.

Rj.:

Prisjetimo se:

Neprazan podskup S vektorskog prostora V je podprostor od V ako i samo ako

(A1) $x,y\in S \Rightarrow x+y\in S$;

(M1) $x\in S \Rightarrow \alpha x\in S$ za $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

Pa pokažimo da vrijede osobine (A1) i (M1).
Izaberimo proizvoljne elemente $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Tada

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}.$$

Uvedimo oznake $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M} \iff a_1x_1+\dots+a_nx_n=0 \iff a^Tx=0$$

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M} \iff a_1y_1+\dots+a_ny_n=0 \iff a^Ty=0$$

$$a^Tx+a^Ty=0 \Rightarrow a^T(x+y)=0 \Rightarrow x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$$

Prema tome vrijedi (A1)

$$\alpha\cdot x=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix}$$

$$a^Tx=0 \Rightarrow a^T\alpha x=0 \Rightarrow \alpha x\in\mathcal{M}$$ vrijedi (M1)

$\mathcal{M}$ jest vektorski podprostor

Da bi odredili bazu i dimenziju napišimo $\mathcal{M}$ u drugačijem obliku

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in V \;\middle|\; a_1x_1+\dots+a_nx_n=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; a^Tx=0\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{bmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right\}=$$

$$=\ker\left(\begin{bmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}\right).$$

Prema tome $\mathcal{M}=\ker(A)$ gdje je $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}$.

Znamo da kolone iz opšteg rješenja od $\ker(A)$ formiraju bazu za $\ker(A)$. Pretpostavimo da je $a\neq 0$. Kako je $\operatorname{rang}(A)=1$ ako posmatramo sistem $Ax=0$ to moramo uzeti $n-1$ promjenjivu proizvoljno. Pretpostavimo da je $a_1\neq 0$, kako je $a\neq 0$ to $\exists a_i\neq 0$

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$$

$$x_1=\frac{a_2}{a_1}x_2+\dots+\frac{a_n}{a_1}x_n$$

$$x=\begin{pmatrix}\frac{a_2}{a_1}x_2+\dots+\frac{a_n}{a_1}x_n\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

Prema tome $\dim(\mathcal{M})=n-1$ i

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{a_2}{a_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{a_3}{a_1}\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\frac{a_n}{a_1}\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

je baza za $\mathcal{M}$.

Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}^+$ (svih pozitivnih realnih brojeva) nad poljem $\mathbb{R}$, na kome su operacije sabiranja vektora i množenje vektora skalarom definisane na sljedeći način

$+: \ \forall u,v \in \mathbb{R}^+ \quad u+v = u\cdot v;$

$\cdot: \ \forall u \in \mathbb{R}^+, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot u = u^{\alpha}.$

Odrediti bazu i dimenziju ovog vektorskog prostora. Odgovor obrazložiti.

Rj. Uzmimo proizvoljan realan broj (vektor iz $\mathbb{R}^+$) npr. $1 \in \mathbb{R}^+$. Šta je span$\{1\}$?

$$\text{span}\{1\} = \{\alpha \cdot 1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{1^{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{1\}$$

Šta je span$\{1,2\}$?

$$\text{span}\{1,2\} = \{\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \{1^{\alpha} + 2^{\beta} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{1^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \{2^{\beta} \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Ova dva primjera nam nameću da je jedna baza vektorskog prostora $\{2\}$. Zašto? (a da je 1 neutralni element)

$$\text{span}\{2\} = \{\alpha \cdot 2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{2^{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Da li je span$\{2\} = \mathbb{R}^+$?

Uzmimo proizvoljan element $b \in \mathbb{R}^+$. Da li tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ t.d. $2^{\alpha} = b$?

Ako za α uzmemo $\log_2 b$ tada $2^{\log_2 b} = b$.

Prema tome skup $\{2\}$ generiše $\mathbb{R}^+$ u odnosu na dvije date operacije. (1 je neutralni element)

Kako $\alpha \cdot 2 = 1 \Rightarrow 2^{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ to je $\{2\}$ linearno nezavisan skup.

Prema tome dimenzija ovog vektorskog prostora je 1, a jedna moguća baza je $\{2\}$.

Za vježbu pokazati da je npr. skup $\{2,3\}$ linearno zavisan u ovom prostoru.

$$\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 3 = 1$$
$$2^{\alpha} + 3^{\beta} = 1$$
$$2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} = 1$$
$$\vdots$$
$$\alpha = \log_2 \frac{1}{3}, \quad \beta = 1$$

(#) U $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zadani su podprostori

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a-2b=0,\ a+c+d=0 \right\} \quad \text{i}$$

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+c=0,\ a-2b+d=0 \right\}.$$

Odrediti po jednu bazu za $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ i $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$.

$\boxed{Mat_{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4 \text{ kao vektorski prostori}}$

Rj. Primjetimo da matricu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ možemo tumačiti i kao vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, pa da bi odredili baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, puno je jednostavnije posmatrati sljedeća dva vektorska podprostora prostora $\mathbb{R}^4$.

$$\mathcal{M}' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, a-2b=0,\ a+c+d=0 \right\} \quad ;$$

$$\mathcal{N}' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, a+c=0,\ a-2b+d=0 \right\}.$$

Svedimo sad prostore $\mathcal{M}'$ i $\mathcal{N}'$ na jezgra nekih matrica

$$\mathcal{M}' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \ker(A)$$

$$\mathcal{N}' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \ker(B)$$

Znamo da kolone iz općeg rješenja sistema $Ax=0$ formiraju bazu za $\ker(A)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II_v - I_v}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{I_v + II_v}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow$ dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c=s$, $d=t$

$$\boxed{\begin{array}{c} a+c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \\ \hline a=-c-d \\ 2b=-c-d \\ \hline b=-\frac{1}{2}(c+d) \end{array}}$$

Rješenja su oblika

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ -\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Baza za $\mathcal{M}$ je

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Slično, posmatramo $\ker(B)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II_v - I_v}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c=s$, $d=t$

$$\begin{array}{c} a+c=0 \\ -2b-c+d=0 \\ \hline a=-c \\ -2b=c-d \\ \hline a=-c \\ b=-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d \end{array}$$

Rješenja su oblika

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Baza za $\mathcal{N}$ je

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Prema definiciji

$$M+N=\{m+n \mid m\in M \text{ i } n\in N\}$$

Pa da bi našli bazu za $M+N$ prvo nađimo baza za $M'+N'$ tj. pronađimo linearno nezavisan skup iz unije baza za M' i N'. Ili iz definicije od $M+N$.

Znamo da

Ako S_X, S_Y generišu X, Y tada $S_X \cup S_Y$ generiše $X+Y$.

Primjetimo da

$$M' = \ker(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\+\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{im}\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$N' = \ker(B) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{im}\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

Znamo $\operatorname{im}(A^T)=\operatorname{im}(B^T)$ akko $A \overset{red}{\sim} B$

$$\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Baza za $M+N$ je

$$\left\{\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$M'\cap N' = \{x\in\mathbb{R}^4 \mid x\in M' \text{ i } x\in N'\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; a-2b=0,\ a+c+d=0,\ a+c=0,\ a-2b+d=0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{=C}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ker(C)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \begin{array}{c}II_v - I_v\\ III_v - I_v\\ \sim\\ IV_v - I_v\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \overset{III_v - II_v}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{II_v + III_v}{\overset{IV_v + III_v}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

1 promjenjivu uzimamo proizvoljnu

$$\begin{aligned} a-2b&=0\\ 2b+c&=0\\ -d&=0 \end{aligned}$$

$c=s$, $s\in\mathbb{R}$

$a=2b$

$2b=-c \Rightarrow b=-\frac{1}{2}s$

$a=-s$

rješenje je

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-s\\-\frac{1}{2}s\\s\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}s$$

Baza za $M\cap N$ je

$$\left\{\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

(#) Neka je V vektorski prostor svih matrica oblika 2×2 nad poljem realnih brojeva. Neka je W_1 skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$$

a neka je W_2 skup matrica oblika

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$$

(a) Dokazati da su W_1 i W_2 podprostori od V.

(b) Odrediti bazu i dimenziju od W_1, W_2, W_1+W_2 i $W_1 \cap W_2$.

Rj:

(a) Prema definiciji, W je podprostor vektorskog prostora V akko je W neprazan skup i ako vrijedi

(A1) $A, B \in W \Rightarrow A+B \in W$

(M1) $A \in W \Rightarrow \alpha A \in W$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Imajući ovu tvrdnju na vidu, dokaz da su W_1 i W_2 podprostori je lagan, i ostavljamo ga za vježbu.

(b) $$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| \ x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \ \middle| \ x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Kako su ovi vektori linearni nezavisni baza za W_1 je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ a dimenzija je 3.

Slično

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c \ \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Kako su ovi vektori linearno nezavisni, baza za W_2 je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ a dimenzija je 3.

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ ili } w_2 \in W_2 \}$$

Primjetimo da proizvoljnu matricu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ možemo napisati kao

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix}}_{\in W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_2}$$

$\Rightarrow$ dimenzija od W_1+W_2 je 4, pa za bazu možemo uzeti npr. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ostalo je još da pronađemo bazu i dimenziju za $W_1 \cap W_2$.

Označimo sa W_1' i W_2' skup koordinata prostora W_1 i W_2 u odnosu na standardnu bazu. Tada

$$W_1' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle| \ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathcal{W}_2' = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-a\\c\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \alpha_1+\alpha_3=0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ker\left(\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathcal{W}_1' \cap \mathcal{W}_2' = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1+x_2=0 \ ; \ x_1+x_3=0\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ker\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}}_{=A}\Bigg)$$

Baza za $\ker A$ su slobodni vektori iz općeg rješenja sistema $Ax=0$.

$\operatorname{rang} A = 2 = \operatorname{rang} \bar{A}$ $\quad x_1+x_2=0 \Rightarrow x_2=-x_1 \quad x_1=s$
$\quad x_1+x_3=0 \Rightarrow x_3=-x_1 \quad x_4=t$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\-s\\-s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}t$$

Baza za $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ je $\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ a odatle slijedi da je $\dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2)=2$.

Na kraju primjetimo da je zadovoljena formula

$$\dim(\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2)=\dim\mathcal{W}_1+\dim\mathcal{W}_2-\dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2)$$

$$4 = 3 + 3 - 2$$

(#) Zadan je skup

$$\mathcal{V}=\left\{\begin{bmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{bmatrix}\in Mat_{2\times2}(\mathbb{C}) : z_1-2\bar{z}_2+z_3=0, \ z_1+\overline{z_2+z_3}+z_4=0\right\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{V}$ realni vektorski podprostor prostora $Mat_{2\times2}(\mathbb{C})$ te mu nađite neku bazu i odredite dimenziju.

Rj: Prisjetimo se:

Neprazan skup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{M}$ je podprostor od $\mathcal{M}$ akko vrijedi

(A1) $x,y\in\mathcal{S} \Rightarrow x+y\in\mathcal{S}$

(M1) $x\in\mathcal{S} \Rightarrow \alpha x\in\mathcal{S}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

(A1) $M,N\in\mathcal{V} \Rightarrow M+N\in\mathcal{V}$

$M=\begin{bmatrix}m_1&m_2\\m_3&m_4\end{bmatrix}$ $\quad m_1-2\bar{m}_2+m_3=0 \ ; \ m_1+\overline{m_2+m_3}+m_4=0$

$N=\begin{bmatrix}n_1&n_2\\n_3&n_4\end{bmatrix}$ $\quad n_1-2\bar{n}_2+n_3=0 \ ; \ n_1+\overline{n_2+n_3}+n_4=0$

$M+N=\begin{bmatrix}m_1+n_1&m_2+n_2\\m_3+n_3&m_4+n_4\end{bmatrix}$; vrijedi $(m_1+n_1)-2\underbrace{(\bar{m}_2+\bar{n}_2)}_{=\overline{m_2+n_2}}+(m_3+n_3)=0$

$(m_1+n_1)+(\overline{(m_2+n_2)+(m_3+n_3)})+(m_4+n_4)=0 \Rightarrow M+N\in\mathcal{V}$

(M1) $\alpha\in\mathbb{R}, Z\in\mathcal{V} \Rightarrow \alpha Z\in\mathcal{V}$

$Z=\begin{bmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{bmatrix}$ $\quad z_1-2\bar{z}_2+z_3=0, \quad z_1+\overline{z_2+z_3}+z_4=0$

$$\alpha Z_1 = \begin{bmatrix} \alpha z_1 & \alpha z_2 \\ \alpha z_3 & \alpha z_4 \end{bmatrix}, \quad \alpha z_1 - 2\overline{\alpha z_2} + \alpha z_3 = \alpha\underbrace{(z_1 - 2\overline{z_2} + z_3)}_{=0} = 0$$

$$\alpha z_1 + \overline{\alpha z_2 + \alpha z_3} + \alpha z_4 = \alpha\underbrace{(z_1 + \overline{z_2 + z_3} + z_4)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha Z_1 \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

Pa prema (A1) i (M1) V jest realni vektorski podprostor.

Da bismo odredili bazu i dimenziju vektorskog prostora V posmatrajmo prostor V' definisan sa

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; z_1 - 2\overline{z_2} + z_3 = 0,\ z_1 + \overline{z_2 + z_3} + z_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; a_1 + ib_1 - 2\overline{(a_2 + ib_2)} + (a_3 + ib_3) = 0,\ a_1 + ib_1 + \overline{(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)} + a_4 + ib_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 \\ a_4 + ib_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; a_1 - 2a_2 + a_3 = 0,\ b_1 + 2b_2 + b_3 = 0,\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0,\ b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 \\ a_4 + ib_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = 0 \ \wedge\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Rješimo dva dobijena sistema i time odredimo koeficijente za a i b.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow$$

dvije promjenjive uzimamo proizvoljno $a_3 = t,\ a_4 = 3s$, $t, s \in \mathbb{R}$

$$a_1 = -a_3 - \frac{2}{3}a_4 = -t - 2s$$

$$a_2 = -\frac{1}{3}a_4 = -s$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-2s \\ -s \\ t \\ 3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow$$

dvije promjenjive uzimamo proizvoljno $b_3 = 3u,\ b_4 = 3v$, $u, v \in \mathbb{R}$

$$b_1 = \frac{1}{3}b_3 - \frac{2}{3}b_4 = u - 2v$$

$$b_2 = -\frac{2}{3}b_3 + \frac{1}{3}b_4 = -2u + v$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-2v \\ -2u+v \\ 3u \\ 3v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} v$$

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 \\ a_4 + ib_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} s,\ t, s \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} v,\ u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} i, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} i \right\}.$$

Time:

Dimenzija prostora V je 4 a jedna od baza je

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & -2i \\ 3i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2i & i \\ 0 & 3i \end{bmatrix} \right\}$$

\# U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je podprostor $\mathcal{M}$ razapet (generisan) vektorima $(0,0,1,0,0)^T$ i $(0,1,0,1,0)^T$ i podprostor

$$\mathcal{L} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x_1-x_2+x_3=0,\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \right\}$$

(a) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$.

(b) Odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$,

(c) Odrediti neku bazu za (direktni) kompliment prostora $\mathcal{L}$ (koji nije ortogonalni komplement).

Rj.

Red vektor $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$ ćemo u rješenju pisati kao kolona vektor $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix}$. Prema postavci zadatka imamo

$$\mathcal{M} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Dalje

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\} = \ker A$$

Generator skup za $\ker A$ su vektori iz opšteg rješenja sistema $Ax=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 2 = \text{rang} \bar{A}$$

Sistem Ax ima ∞ mnogo rješenja i 3 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_2=s$, $x_4=t$, $x_5=u$

$x_1 = x_2 - x_3 \Rightarrow x_1 = s-t$

$-x_3 = -x_4 \Rightarrow x_3 = t$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s-t\\s\\t\\t\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} s + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} u$$

Time je $\mathcal{L} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Prema tome $\dim \mathcal{M} = 2$, $\dim \mathcal{L} = 3$ a baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$ su redom

$$\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \text{i} \quad \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

b) Prisjetimo se:

Dimenzija sume

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora V, tada

$$\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{X}) + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$$

gdje je $\mathcal{X}+\mathcal{Y} = \{x+y \mid x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y}\}$.

Ako sa $\mathcal{B}_\mathcal{M}$ označimo bazu za $\mathcal{M}$ a sa $\mathcal{B}_\mathcal{L}$ označimo bazu za $\mathcal{L}$, vidimo da $\mathcal{B}_\mathcal{M} \cup \mathcal{B}_\mathcal{L}$ generiše $\mathcal{M}+\mathcal{L}$.

Dimenziju za $\mathcal{M}+\mathcal{L}$ nije teško odrediti, posmatramo broj linearno nezavisnih kolona iz $\mathcal{B}_\mathcal{M} \cup \mathcal{B}_\mathcal{L}$:

$$D = \begin{pmatrix} 0&0&1&-1&0\\ 0&1&1&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \overset{I_k \leftrightarrow III_k}{\sim} \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \overset{IV_v + II_v \cdot (-1)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } D = 4 \Rightarrow \dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = 4$$

$$\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \underset{2}{\dim \mathcal{X}} + \underset{3}{\dim \mathcal{Y}} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$$

$$\dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 1$$

U zadatku se ne traži da odredimo bazu za $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Međutim, ako bi željeli da odredimo ovu bazu prvo primjetimo da je

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

i kako je $\dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = 1$ to je $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

c) Prisjetimo se

Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod je

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad i \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0 .$$

i u ovom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, i ovo označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Ako su $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ tada

$\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ akko $\forall v \in \mathcal{V}\ \exists!\, x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ t.d. $v = x + y$ akko $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \emptyset$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$

Ako sa B označimo matricu

$$B = \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\-1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

tada je

$$\operatorname{im}(B^T) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathcal{L}$$

pa produžimo bazu od $\mathcal{L}$ do baze prostora $\mathbb{R}^5$.

Znamo da je, za proizvoljne matrice A i B

$$\operatorname{im}(A^T) = \operatorname{im}(B^T) \text{ akko } A \overset{red}{\sim} B$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\-1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{IV_v + I_v\cdot(-1)}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{V_v + II_v\cdot(-1)}{\overset{IV_v + II_v}{\sim}} \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&\boxed{1}&0&0\\0&0&0&\boxed{1}&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Baza za direktni komplement prostora $\mathcal{L}$ je

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(#) Neka je $\mathcal{V}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^3$ generisan vektorima (x_1, x_2 i x_3 su linearno nezavisni vektori)

$$\mathcal{V} = \text{span}\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ovo znači da za $\forall v \in \mathcal{V}$ $\exists$ jedinstveni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t. d.

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Sa $\mathcal{V}^*$ označimo skup svih linearnih preslikavanja sa $\mathcal{V}$ u $\mathbb{R}$ tj.

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R}) = \{ T : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \mid T \text{ je linearno} \}$$

i za svako $j \in \{1,2,3\}$ definišimo $T_j \in \mathcal{V}^*$ sa

$$T_j(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_j.$$

Pokazati da je $\mathcal{B}^* = \{T_1, T_2, T_3\}$ baza za $\mathcal{V}^*$; i odrediti T_1, T_2 i T_3.

Rj. Da bi dokazali da je $\mathcal{B}^*$ baza za $\mathcal{V}^*$, trebamo pokazati da je skup $\{T_1, T_2, T_3\}$ linearno nezavisan i da se svaka linearna transformacija $T \in \mathcal{V}^*$ može prikazati kao linearna kombinacija elemenata T_1, T_2 i T_3.

(a) Pokažimo da je skup $\{T_1, T_2, T_3\}$ linearno nezavisan.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ i posmatrajmo $\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3 = \mathbf{0}$ $(\mathbf{0} \in \mathcal{V}^*)$

Izaberimo proizvoljan $x \in \mathcal{V}$ $(\Rightarrow \exists a_1, a_2, a_3$ t. d. $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$

$$(\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)(x) = \mathbf{0}(x)$$

$$\alpha T_1(x) + \beta T_2(x) + \gamma T_3(x) = 0 \quad (0 \in \mathbb{R})$$

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 0 \xRightarrow{x \text{ proizv.}} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\Rightarrow$ $\{T_1, T_2, T_3\}$ je linearno nezavisan skup

(b) Pokažimo da $\{T_1, T_2, T_3\}$ generišu $\mathcal{V}^*$.

Neka je $T \in \mathcal{V}^*$ proizvoljan, i neka je $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ proizvoljan element iz $\mathcal{V}$ $(x \in \mathcal{V})$. Tad

$$T(x) = T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + \alpha_3 T(x_3)$$

$$\alpha_1 = T_1(x), \quad \alpha_2 = T_2(x), \quad \alpha_3 = T_3(x)$$

$$= \underbrace{T(x_1)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ (\text{npr. } \beta_1)}} T_1(x) + \underbrace{T(x_2)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ (\text{npr. } \beta_2)}} T_2(x) + \underbrace{T(x_3)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ (\text{npr. } \beta_3)}} T_3(x)$$

$$= \beta_1 T_1(x) + \beta_2 T_2(x) + \beta_3 T_3(x)$$

$$= (\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3)(x)$$

$\Rightarrow$ za proizvoljan $T \in \mathcal{V}^*$ odrediti smo $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ t. d.

$$T = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3 \Rightarrow \{T_1, T_2, T_3\} \text{ generiše } \mathcal{V}^*.$$

(a) i (b) $\Rightarrow$ $\mathcal{B}^* = \{T_1, T_2, T_3\}$ je baza za $\mathcal{V}^*$.

(c) Odredimo T_1, T_2 i T_3.

Ove linearne transformacije ćemo odrediti iz definicije

$$T_1(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_1$$

$$T_2(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_2$$

$$T_3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = a_3$$

Neka je $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ proizvoljan vektor. Odredimo a_1, a_2 i a_3 t. d.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_1 \\ -1 & 1 & 3 & y_2 \\ 3 & -1 & -2 & y_3 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 7y_1 - 2y_2 - 3y_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2y_1 + y_2 + y_3 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad a_1 = y_1, \quad a_2 = 7y_1 - 2y_2 - 3y_3, \quad a_3 = -2y_1 + y_2 + y_3$

Prema tome za proizvoljan vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in V$ vrijedi

$$T_1(v) = T_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1$$

$$T_2(v) = T_2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 7v_1 - 2v_2 - 3v_3$$

$$T_3(v) = T_3\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 + v_3$$

Napomena:

Prostor V^* se naziva dualni prostor prostora V, a baza $\mathcal{B}^*$ se naziva dualna baza baze $\mathcal{B}$.

Prva četri Lagranžova polinoma su 1, $1-t$, $2-4t+t^2$ i $6-18t+9t^2-t^3$. Pokazati da ovi polinomi formiraju bazu vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ (skup svih polinoma stepena manjim ili jednakim od 3). Odrediti polinom $q \in \mathcal{P}_3$ takav da $[q]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ako je $\mathcal{B}$ baza sastavljena od četri data Lagranžova polinoma.

Rj. Da bi skup $\mathcal{B} = \{1, 1-t, 2-4t+t^2, 6-18t+9t^2-t^3\}$ bio baza vektorskog prostora potrebno je i dovoljno da je taj skup linearno nezavisan i da generiše svaki vektor $p \in \mathcal{P}_3$.

Pokažimo prvo linearnu nezavisnost. Posmatramo

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1-t) + \gamma(2-4t+t^2) + \delta(6-18t+9t^2-t^3) = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma + 6\delta &= 0 \\ -\beta - 4\gamma - 18\delta &= 0 \\ \gamma + 9\delta &= 0 \\ -\delta &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

$\Rightarrow$ skup $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan skup

Da li $\mathcal{B}$ generiše proizvoljan polinom $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 & a \\ 0 & -1 & -4 & -18 & b \\ 0 & 0 & 1 & 9 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\dots}{\overset{\text{osnovne red operacije}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a+b+2c+6d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b-4c-18d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c+9d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -d \end{array}\right]$$

Prema tome $\mathcal{B}$ generiše proizvoljni polinom $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ i vrijedi

$$p(t) = (a+b+2c+6d) \cdot 1 + (-b-4c-18d) \cdot (1-t) + (c+9d)(2-4t+t^2) + (-d) \cdot (6-18t+9t^2-t^3)$$

Odavde vidimo da za polinom $p(t)=a+bt+ct^2+dt^3$ vrijedi

$$[p]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} a+b+2c+6d \\ -b-4c-18d \\ c+9d \\ -d \end{pmatrix}$$

Da bi odredili polinom g za koji vrijedi $[g]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ na osnovu $[p]_{\mathcal{B}}$ primjetimo da moramo imati

$$\begin{aligned} a+b+2c+6d&=-2 \\ -b-4c-18d&=0 && \Rightarrow -b=4 \\ c+9d&=1 && \Rightarrow c=1 \qquad b=-4 \\ -d&=0 && \Rightarrow d=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a-4+2+6\cdot 0=-2$$
$$a=0$$

Traženi polinom $g(t)$ je oblika

$$g(t)=-4t+t^2$$

Dokazati da je $\mathcal{V}=\{A\in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid trag\,A=0\}$ vektorski podprostor prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (gdje je $trag\,A$ = sumi dijagonalnih elemenata matrice A). Odredite mu bazu i dimenziju. Nadopunite nađenu bazu do baze za $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Rj.

Primjetimo da je

$$\mathcal{V}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+d=0,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=0\right\}$$

Pokažimo prvo da je $\mathcal{V}$ vektorski podprostor od $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tj. pokažimo da je $\mathcal{V}$ neprazan i da vrijede osobine (A1) i (M1):

(A1) $\quad A,B\in\mathcal{V} \Rightarrow A+B\in\mathcal{V}$

(M1) $\quad A\in\mathcal{V} \Rightarrow \alpha A\in\mathcal{V}$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

$\mathcal{V}$ je neprazan npr. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\in\mathcal{V}$ $(-1+1=0)$

Neka su A, i B dvije proizvoljne matrice iz $\mathcal{V}$ npr.

$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$. Tada $a_1+a_4=0$ i $b_1+b_4=0$.

Kako je $A+B=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}$ to je i $a_1+b_1+a_4+b_4=0$ pa je $A+B\in\mathcal{V}$, $(trag(A+B)=0)$. Slično $\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ trag(\alpha A)=\alpha a_1+\alpha a_4=\alpha(a_1+a_4)=0 \Rightarrow \alpha A\in\mathcal{V}$

$\mathcal{V}$ je vektorski podprostor prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Primjetimo da je puno lakše odrediti bazu i dimenziju prostora $V' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; a+d=0 \right\}$, pa dobijeni rezultat iskoristiti za V.

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \right\} = \ker(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}).$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 1 < 4$$

$\Rightarrow$ 3 promjenjive uzimamo proizvoljno

$a+d=0 \Rightarrow a=-d$

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ t \\ v \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t,v \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Prema tome baza za V je $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ i V je dimenzije 3.

Nadopunimo prvo V' do baze za $\mathbb{R}^4$ pa iskoristimo taj rezultat za V.

Odredimo četiri linearno nezavisna vektora iz sljedeće matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prema tome baza za $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

\# U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \mid a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} - 2a_n = 0, \; n \in \mathbb{N}\}.$$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i odrediti mu bazu i dimenziju.

Rj: Da bi pokazali da je $\mathcal{L}$ podprostor od $\mathbb{R}^n$ potrebno je i dovoljno pokazati da je $\mathcal{L}$ neprazan skup i da vrijede

(A1) $(a_n) \in \mathcal{L}, (b_n) \in \mathcal{L} \Rightarrow (a_n) + (b_n) \in \mathcal{L}$

(M1) $(a_n) \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha(a_n) \in \mathcal{L}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Primjetimo da je $(0,0,0,\dots,0,0,\dots) = (0)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ pa je $\mathcal{L}$ neprazan.

Izaberimo dva proizvoljna niza $(a_n), (b_n) \in \mathcal{L}$ (tada $a_{n+2} - 2a_n = 0$ i $b_{n+2} - 2b_n = 0$)

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$a_{n+2} + b_{n+2} - 2(a_n + b_n) = a_{n+2} - 2a_n + b_{n+2} - 2b_n = 0$$

$\Rightarrow (a_n) + (b_n) \in \mathcal{L} \Rightarrow$ vrijedi A1

Za proizvoljan $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha(a_n) = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\alpha a_{n+2} - 2\alpha a_n = \alpha(a_{n+2} - 2a_n) = 0 \Rightarrow \text{vrijedi M1}$$

Da bi odredili bazu i dimenziju prostora $\mathcal{L}$, posmatrajmo prvo lakšu verziju zadatka tj. posmatrajmo nizove dimenzije 3, 4 i n.

$$\mathcal{L}_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 - 2a_1 = 0\} = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

$\bar{A} = [-2 \ 0 \ 1 \,|\, 0] \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 1 < 3$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno $a_1 = t$, $a_2 = s$

$\mathcal{L}_3 = \{(t, s, 2t) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1,0,2), (0,1,0)\}$

$\dim(\mathcal{L}_3) = 2$

$\mathcal{L}_4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_3 - 2a_1 = 0,\ a_4 - 2a_2 = 0\} =$

$= \left\{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$

$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2 < 4$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno $a_1 = t$, $a_2 = s$

$\mathcal{L}_4 = \{(t, s, 2t, 2s) \mid s,t \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1,0,2,0), (0,1,0,2)\}$

$\dim(\mathcal{L}_4) = 3$

$\mathcal{L}_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_3 - 2a_1 = 0,\ a_4 - 2a_2 = 0,\ a_5 - 2a_3 = 0, \dots, a_n - 2a_{n-2} = 0\}$

$= \left\{(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$

$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccccccccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = n-2 < n$

2 promjenjive uzimamo proizvoljno

$a_1 = s$, $a_2 = t$, $a_3 = 2s$, $a_4 = 2t$, $a_5 = 4s$, $a_6 = 4t, \dots$, $a_{2k+1} = 2^k s$, $a_{2k} = 2^k t, \dots$

Sad matematičkom indukcijom nije teško pokazati da je $\dim(\mathcal{L}) = 2$, a da je baza za $\mathcal{L}$

$\{(1,0,2,0,4,0,8,\dots), (0,1,0,2,0,4,0,8,\dots)\}.$

\# Posmatrajmo vektorski podprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa $x_1 = (-1,0,1,2)^T$, $x_2 = (1,2,-3,5)^T$ i $x_3 = (1,4,0,9)^T$. Odrediti sistem homogenih linearnih jednačina za koji prostor rješenja je tačno podprostor od $\mathbb{R}^4$ generisan sa tačno tri data vektora.

Rj. Dati podprostor prostora $\mathbb{R}^4$ označimo sa $\mathcal{W}$ tj.

$$\mathcal{W} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{im}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \right)$$

Prisjetimo se: $\operatorname{im}(A) = \operatorname{im}(B)$ akko $A \overset{kol}{\sim} B$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \underset{III_k + I_k}{\overset{II_k + I_k}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 11 \end{bmatrix} \overset{III_k + II_k \cdot (-2)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{II_k \cdot \frac{1}{2} \\ III_k \cdot \frac{1}{5}}}{\overset{I_k \cdot (-1)}{\sim}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 7/2 & -3/5 \end{bmatrix} \underset{I_k + III_k}{\overset{II_k + III_k}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{13}{5} & \frac{29}{10} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{35 - 6}{10} = \frac{29}{10}$$

Odavde možemo zaključiti da

$$\mathcal{W} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{29}{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Ovaj podprostor je dimenzije 3, pa ako posmatramo homogeni sistem linearnih jednačina $Ax = \mathbf{0}$ gdje je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n4} \end{bmatrix}$ tada

$\ker(A)$ mora biti dimenzije 1. Drugim riječima sistem $Ax=0$ se može svesti na jednu jednačinu

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$$

čije je opšte rješenje oblika $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\t\\v\\-\frac{13}{5}s+\frac{29}{10}t-\frac{3}{5}v\end{pmatrix}$

Odavde slijedi da je

$$x_4=-\frac{13}{5}x_1+\frac{29}{10}x_2-\frac{3}{5}x_3 \quad /\cdot 10$$

$$10x_4=-26x_1+29x_2-6x_3$$

$$26x_1-29x_2+6x_3+10x_4=0$$

Provjerimo da li su dati vektori $x_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\5\end{pmatrix}$ i $x_3=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\9\end{pmatrix}$ rješenja dobijene jednačine.

x_1: $\quad -26+6+20=0$

x_2: $\quad 26-58-18+50=0$

x_3: $\quad 26-116+90=0$

Sistem homogenih linearnih jednačina za koji je prostor rješenja generisan sa tačno tri data vektora je npr. sistem

$$26x_1-29x_2+6x_3+10x_4=0$$

$$13x_1-\frac{29}{2}x_2+3x_3+5x_4=0$$

$$\frac{26}{3}x_1-\frac{29}{3}x_2+2x_3+\frac{10}{3}x_4=0$$

(#) Bez računanja determinante, odrediti da li kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup

$$A=\begin{pmatrix}7&3&0&\cdots&0&0\\2&7&3&\cdots&0&0\\0&2&7&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&7&3\\0&0&0&\cdots&2&7\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Da li je matrica A singularna?

Rj. Znamo da:

kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup $\underline{\text{akko}\quad \ker(A)=\{0\}}$ akko $\operatorname{rang}(A)=n$ (gdje je $A_{n\times n}$)

Pa provjerimo da li je $\ker(A)=\{0\}$.

(Primjetimo da je matrica A dijagonalno dominantna, tj.

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}| \quad \text{za } \forall i=1,2,\dots,n)$$

Pretpostavimo da postoji $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}\neq 0$ takav da je $Ax=0$

Tada imamo

$$\begin{array}{l}7x_1+3x_2+0+\dots+0+0=0\\2x_1+7x_2+3x_3+\dots+0+0=0\\0+2x_2+7x_3+\dots+0+0=0\\\vdots\\0+0+0+\dots+7x_{n-1}+3x_n=0\\0+0+0+\dots+2x_{n-1}+7x_n=0\end{array}$$

Neka je $x_k=\max\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ i posmatrajmo k-tu vrstu ovog sistema.

$$0+0+\ldots+2x_{k-1}+7x_k+3x_{k+1}+\ldots+0=0$$

$$7x_k=-2x_{k-1}-3x_{k+1} \quad /\,|\,|$$

$$7|x_k|=2|x_{k-1}|+3|x_{k+1}|\le 2|x_k|+3|x_k|$$

$$7|x_k|\le 5|x_k|$$

kontradikcija ($7>5$)

(Slično bi imali i da je $k=1$ ili $k=n$.

Pretpostavka da postoji $x\neq 0$ takav da $Ax=0$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome

$\ker A=\{0\} \Rightarrow$ kolone matrice A formiraju linearno nezavisan skup.

Matrica A je nesingularna (postoji A^{-1}).

(#) Odrediti za koje vrijednosti nepoznate x će vektor $(0,1,1,4)^T\in\mathbb{R}^4$ pripadati $im(A)$ ako je

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1-x&1&1&1\\0&1-x&1&1\\0&0&1-x&1\end{bmatrix}.$$

Rj. $im(A)=\{Ay \mid y\in\mathbb{R}^4\}$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A

$b\in im(A)$ akko se vektor b može izraziti kao linearna kombinacija kolona matrice A

Drugim riječima tražimo one nepoznate x za koje sistem $Ay=b$ ima bar jedno rješenje.

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\1-x&1&1&1&1\\0&1-x&1&1&1\\0&0&1-x&1&4\end{array}\right]\overset{II_v-I_v}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\-x&0&0&0&1\\0&1-x&1&1&1\\0&0&1-x&1&4\end{array}\right]\overset{(*)}{\sim}$$

Primjetimo da moramo razmotriti slučaj kada je $x=0$

$$(*)\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&4\end{array}\right]\underset{III_v-IV_v}{\overset{I_v-III_v}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&1&4\end{array}\right]\overset{II_v\leftrightarrow IV_v}{\sim}\ldots\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&1&4\\0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

vidimo da sistem u ovom slučaju nema rješenja

Razmotrimo slučaj kada je $x\neq 0$

$$\underset{II_v:(\ )}{\overset{(*)}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\-1&0&0&0&1/x\\0&1-x&1&1&1\\0&0&1-x&1&4\end{array}\right]\overset{II_v+I_v}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1/x\\0&1-x&1&1&1\\0&0&1-x&1&4\end{array}\right]\overset{III_v-II_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/x \\ 0 & -x & 0 & 0 & 1-\frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & 4 \end{array}\right] \overset{III_v : x}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/x \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{x}-\frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & 4 \end{array}\right] \overset{IV_v - III_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/x-1/x^2 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} \end{array}\right]$$

$$\overset{IV_v : x}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/x-1/x^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3} \end{array}\right] \overset{IV_v + III_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/x-1/x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3} \end{array}\right]$$

Možemo zaključiti da za sve vrijednosti x za koje je $x \neq 0$ dati vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ će pripadati $im(A)$.

(#) Diskutovati za koje vrijednosti parametra a i b će vektor $(4,3,2,1)^T \in \mathbb{R}$ pripadati $im(A)$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ a & 0 & b & -1 \\ a & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Rj. $im(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A

Primjetimo da će $b \in \mathbb{R}^4$ pripadati $im(A)$ akko se vektor b može izraziti kao linearna kombinacija kolona matrice A. Drugim riječima $b \in im(A)$ akko sistem $Ax = b$ ima bar jedno rješenje.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ a & b & -1 & 0 & 3 \\ a & 0 & b & -1 & 2 \\ a & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \underset{II_v - I_v}{\overset{\substack{IV_v - III_v \\ III_v - II_v}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & b+1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & b+1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -b & b+1 & -1 \end{array}\right] \overset{\substack{II_v + III_v \\ III_v + IV_v}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} a & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & b & -1 & -2 \\ 0 & -b & 1 & b & -2 \\ 0 & 0 & -b & b+1 & -1 \end{array}\right]$$

Prije nego što nastavimo dalje podjelimo problem na dva dijela: slučaj kada je $a = 0$ i slučaj kada je $a \neq 0$

1° $a = 0$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & b & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right]$$

Odavde odmah vidimo da za $b = 0$ dati vektor ne pripada $im(A)$. Razmotrimo slučaj kada je $b\neq 0$

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}0&-1&0&0&4\\0&b&-1&0&3\\0&0&b&-1&2\\0&0&0&b&1\end{array}\right]\underset{b\neq 0}{\overset{II_v+I_v\cdot b}{\sim}}\left[\begin{array}{cccc|c}0&-1&0&0&4\\0&0&-1&0&3+4b\\0&0&b&-1&2\\0&0&0&b&1\end{array}\right]\overset{III_v+II_v\cdot b}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}0&-1&0&0&4\\0&0&-1&0&3+4b\\0&0&0&-1&2+3b+4b^2\\0&0&0&b&1\end{array}\right]\overset{IV_v+III_v\cdot b}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}0&-1&0&0&4\\0&0&-1&0&3+4b\\0&0&0&-1&2+3b+4b^2\\0&0&0&0&1+2b+3b^2+4b^3\end{array}\right]$$

Odavde vidimo da ako postoji b t.d. $1+2b+3b^2+4b^3=0$ vrijedi $(4,3,2,1)^T\in im(A)$. Za ostale b-ove vektor ne pripada $im(A)$.

2° $a\neq 0$

$$\bar{A}\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{cccc|c}a&-1&0&0&4\\0&1&b&-1&-2\\0&-b&1&b&-2\\0&0&-b&b+1&-1\end{array}\right]\overset{III_v+II_v\cdot b}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}a&-1&0&0&4\\0&1&b&-1&-2\\0&0&1+b^2&0&-2-2b\\0&0&-b&b+1&-1\end{array}\right]\overset{III_v+IV_v\cdot b}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}a&-1&0&0&4\\0&1&b&-1&-2\\0&0&1&b^2+b&-2-3b\\0&0&-b&b+1&-1\end{array}\right]\overset{IV_v+III_v\cdot b}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}a&-1&0&0&4\\0&1&b&-1&-2\\0&0&1&b(b+1)&-2-3b\\0&0&0&\underbrace{b^3+b^2+b+1}_{(b^2+1)(b+1)}&-3b^2-2b-1\end{array}\right]$$

Odavde vidimo da za $b=-1$ sistem nema rješenja, dok $b\neq -1$ sistem ima jedinstveno rješenje.

Zaključak

1° $a=0$ (a) $b=0$ $\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\notin im(A)$

(b) b je korijen od $4x^3+3x^2+2x+1=0$, $\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\in im(A)$
a za sve ostale b-ove $(4,3,2,1)\notin im(A)$.

2° $a\neq 0$ (a) $b=-1$ $\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\notin im(A)$

(b) $b\neq -1$ $(4,3,2,1)\in im(A)$.

Neka je $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ matrica linearnog operatora

T u kanonskoj bazi φ (drugim riječima

$[T]_\varphi=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ gdje je $\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$).

Odrediti matricu operatora T u bazi $\varphi'=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

(drugim riječima odrediti $[T]_{\varphi'}$).

Rj.

$$[T]_\varphi=\begin{pmatrix}|&|&|\\ [T(e_1)]_\varphi&[T(e_2)]_\varphi&[T(e_3)]_\varphi\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad \varphi=\{e_1,e_2,e_3\}$$

$$[T(e_1)]_\varphi=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad [T(e_2)]_\varphi=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right]_\varphi,\quad [T(e_3)]_\varphi=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\varphi$$

$$\Rightarrow\quad T(x)=Tx \text{ za } \forall x\in\mathbb{R}^3 \text{ gdje je } T=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

$$[T]_{\varphi'}=\begin{pmatrix}|&|&|\\ \left[T\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}&\left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}&\left[T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}\\|&|&|\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}$$

Odredimo α,β i γ t.d. $\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}3\\-2\\-1\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}2\alpha+\beta+3\gamma&=2\\ \beta-2\gamma&=5\\ \alpha+\beta-\gamma&=0\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \bar{A}=[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&2\\0&1&-2&5\\1&1&-1&0\end{array}\right]\overset{I_v\leftrightarrow III_v}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&-2&5\\2&1&3&2\end{array}\right]\overset{III_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&-2&5\\0&-1&5&2\end{array}\right]\overset{III_v+II_v}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&-2&5\\0&0&3&7\end{array}\right]\Rightarrow$$

$3\gamma=7$

$\gamma=\frac{7}{3}$

$\beta=2\gamma+5$

$\beta=\frac{14}{3}+5$

$\beta = \frac{29}{3}$

Prema tome $\left[T\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-22/3\\29/3\\7/3\end{pmatrix}$

$\alpha + \beta - \gamma = 0$

$\alpha = \gamma - \beta = \frac{7}{3} - \frac{29}{3} = -\frac{22}{3}$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$$

Odredimo α, β i γ tako da $\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c}2&1&3&3\\0&1&-2&3\\1&1&-1&-1\end{array}\right] \overset{I_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&1&-2&3\\2&1&3&3\end{array}\right] \overset{III_v + I_v\cdot(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&1&-2&3\\0&-1&5&5\end{array}\right] \sim$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&3&8\end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix}3\gamma = 8\\ \gamma = \frac{8}{3}\end{matrix}$$

$\beta = 2\gamma + 3 = \frac{16}{3} + \frac{9}{3} = \frac{25}{3}$

$\alpha + \beta - \gamma = -1$

$\alpha = -\frac{20}{3}$

$$\Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-20/3\\25/3\\8/3\end{pmatrix}$$

I na kraju

$$T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\dots} \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}-22/3 & -20/3 & -3\\ 29/3 & 25/3 & 5\\ 7/3 & 8/3 & 0\end{pmatrix}$$

\# Neka je φ linearna transformacija $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tako da

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = 1, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = 0, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0.$$

Odrediti $\varphi\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

Rj. Prisjetimo se

Linearna transformacija

Neka su U i V vektorski prostori nad $\mathbb{R}$. Linearna transformacija T sa U u V je linearna f-ja sa U i V. Drugim riječima

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad i \quad T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x,y \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Napišimo vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, tj. odredi α, β, γ i δ t. d.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

Nije teško vidjeti da je $-\delta = d \Rightarrow \delta = -d$

$\beta + \delta = c \Rightarrow \beta = c - \delta \Rightarrow \beta = c + d$

$-\beta - \gamma - \delta = b \Rightarrow -c - \cancel{d} - \gamma + \cancel{d} = b \Rightarrow \gamma = -b - c$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = a \Rightarrow \alpha = a - \beta - \gamma - \delta = a - \cancel{c} - \cancel{d} + b + \cancel{c} + \cancel{d} = a + b$

Prema tome $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (c+d)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + (-b-c)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + (-d)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Sad nije teško izračunati $\varphi\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

$$\varphi\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = (a+b)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=1} + (c+d)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{=1} + (-b-c)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}}_{=0} + (-d)\underbrace{\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{=0}$$

$$= a+b+c+d.$$

Zadana je linearni transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$), te mu odrediti po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

Rj: Prisjetimo se

Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definisana kao $m \times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Standardna baza za $\mathcal{P}_2$ je $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Standardna baza za $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{S}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix}0&1\\1&4\end{pmatrix} \Rightarrow [T(x^2)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$$

Sljedeće što želimo je odrediti baze za jezgru i sliku od T.

$$\ker(T) = \{ g \in \mathcal{P}_2 \mid T(g) = 0 \}$$

$$\operatorname{im}(T) = \{ T(p) \mid p \in \mathcal{P}_2 \}$$

Prisjetimo se

<u>Djelovanje operatora kao množenje matricom</u>

<u>Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada</u>

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}$$

Neka je g proizvoljan polinom iz $\mathcal{P}_2$, $g(x) = a + bx + cx^2$

$$[g]_\varphi = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Sad možemo pisati

$$\ker(T) = \{ [g]_\varphi \mid [T(g)]_{\varphi'} = \mathbf{0} \} = \{ [g]_\varphi \mid [T]_{\varphi\varphi'}[g]_\varphi = \mathbf{0} \}$$

Prema tome $\ker(T) = \ker([T]_{\varphi\varphi'}) = \ker\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}\right)$.

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix} \underset{\substack{III_v - I_v\\ IV_v - I_v}}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\\0&2&4\end{pmatrix} \underset{IV_v + II_v\cdot(2)}{\overset{III_v + II_v}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&2\\0&0&6\end{pmatrix} \overset{IV_v + III_v\cdot(-3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} \overset{III_v : 2}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \overset{II_v\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \dots(*)$$

$$\Rightarrow a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \operatorname{span}\{0\}$$

$$\operatorname{im}(T) = \{ [T(p)]_{\varphi'} \mid [p]_\varphi \} = \{ [T]_{\varphi\varphi'}[p]_\varphi \mid [p]_\varphi \} = \operatorname{im}([T]_{\varphi\varphi'})$$

Osnovne kolone u $[T]_{\varphi\varphi'}$ formiraju bazu za $\operatorname{im}([T]_{\varphi\varphi'})$

$$\Rightarrow \operatorname{im}(T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} \right\}.$$

Odredimo još polinom $g \in \mathcal{P}_2$ tako da $T(g) = \begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}$.

$$[T(g)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\\4\end{pmatrix} = [T]_{\varphi\varphi'}\cdot[g]_\varphi = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= 2\\ a - b + c &= 1\\ a + b + c &= 5\\ a + 2b + 4c &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -b + c &= -1\\ b + c &= 3\\ 2b + 4c &= 2 \end{aligned}$$

sistem nema rješenje

Ne postoji polinom $g \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(g) = \begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}$.

(#) Zadan je linearni operator $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ svojom matricom $T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

Neka su $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$.

(a) Odrediti $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$.

(b) Za koje $\alpha\in\mathbb{R}$ su vektori $T(\vec{a})$, $T(\vec{a}+\alpha\vec{b})$ kolinearni?

Rj.

Kanonsku bazu $\{\vec{i},\vec{j}\}$ u $\mathbb{R}^2$ možemo pisati i kao $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Šta znači da je linearni operator T $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dat svojom matricom $T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i},\vec{j}\}$? Prisjetimo se

Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Ako je samo jedna baza u igri umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$.

Ako kanonsku bazu $\{\vec{i},\vec{j}\}$ označimo sa φ tj.

$$\varphi=\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{i}},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{j}}\Big\}$$

to imamo

$$T=[T]_{\varphi}=\begin{pmatrix} | & | \\ [T(\vec{i})]_{\varphi} & [T(\vec{j})]_{\varphi} \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$[T(\vec{i})]_{\varphi}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad T(\vec{i})=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

tj.

$$[T(\vec{j})]_{\varphi}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad T(\vec{j})=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

a)
$$T(\vec{a})=T(\vec{i}+\vec{j})=T(\vec{i})+T(\vec{j})=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T(\vec{b})=T(\vec{i}-2\vec{j})=T(\vec{i})-2T(\vec{j})=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

b)
$$T(\vec{a}+\alpha\vec{b})=T(\vec{a})+\alpha T(\vec{b})=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-\alpha\\2-\alpha\end{pmatrix}$$

$$T(\vec{a})=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

Neki Vektori $\vec{t}_1$ i $\vec{t}_2$ su kolinearni ako su linearno zavisni ili drugim riječima ako postoji realan broj k t.d. $\vec{t}_1=k\vec{t}_2$.

U našem slučaju npr. tražimo broj η takav da je

$$T(\vec{a}+\alpha\vec{b})=\eta\, T(\vec{a})$$

tj. $\begin{pmatrix} -1-\alpha \\ 2-\alpha \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -1-\alpha &= -\eta \\ 2-\alpha &= 2\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha - \eta &= -1 \\ \alpha + 2\eta &= 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \overset{II_v : 3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{I_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \eta = 1 \end{array}$$

Za $\alpha = 0$ vektori $T(\vec{a})$ i $T(\vec{a} + \alpha \vec{b})$ su kolinearni.

(#) Zadan je linearni operator $T: Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ sa

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -a+b+2c \\ a-c-d & -a+2c+d \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite po jednu bazu za $\ker(T)$ i $\mathrm{im}(T)$.

(b) Odredite matricu koordinata od T u odnosu na standardnu bazu prostora $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Rj.

(a) Za jednostavniji pristup umjesto prostora $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^4$ i operator $T': \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definisan sa

$$T'\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b \\ -a+b+2c \\ a-c-d \\ -a+2c+d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\ker(T') = \{ x \mid T'(x) = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \,\middle|\, A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \ker(A)$$

Znamo:

Jezgro od A je opće rješenje sistema $Ax = \mathbf{0}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{III_v - I_v \\ IV_v + I_v}}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{IV_v + III_v \cdot (-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$a-d=0$$
$$b-d=0$$
$$c=0$$
$$d\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\s\\0\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}s$$

baza za $\ker(T)$

Prema tome $\ker(T)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

$$im(T)=\{T(x)\mid x\in\mathbb{R}^4\}=\left\{A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\right\}=im(A)$$

Znamo:

<u>Generator skup za $im(A)$ su osnovne kolone u A.</u>

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&2&0\\1&0&-1&-1\\-1&0&2&1\end{bmatrix}\sim\dots\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

baza za $im(T)$.

$$\Rightarrow\quad im(T)=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&2\\-1&2\end{bmatrix}\right\}$$

(b) Standardna baza za $Mat_{2\times2}$ je $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

$$[T]_\varphi=\left(\left[T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_\varphi\;\left[T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_\varphi\;\left[T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]_\varphi\;\left[T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]_\varphi\right)$$

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-1&2\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$[T]_\varphi=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&2&0\\1&0&-1&-1\\-1&0&2&1\end{pmatrix}$$

\# Posmatrajmo operator $T:\mathcal{P}_3\to\mathcal{P}_3$ na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ svih polinoma sa realnim koeficijentima i stepenom najviše 3, gdje je za svaki polinom $p(x)$ iz $\mathcal{P}_3$ imamo $T(p(x))=xp'(x)$, proizvod x-a sa izvodom $p'(x)$ polinoma $p(x)$. Pokazati da je T linearni operator. Odrediti matricu (koordinata) A za operator T u odnosu na bazu $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3\}$ i izračunati $A[g(x)]_\mathcal{B}$ gdje je $g(x)=g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3$.

Rj.

Izaberimo proizvoljno $p(x)\in\mathcal{P}_3$ npr. $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

Tada

$$T(p(x))=x\cdot(b+2cx+3dx^2)=bx+2cx^2+3d_1x^3$$

(a) Pokažimo da je T linearni operator.

Posmatraćemo dva proizvoljna polinoma $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ i $p_1(x)=a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3$

$$T(p(x)+p_1(x))=x\cdot(a+bx+cx^2+dx^3+a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3)'$$
$$=x(b+2cx+3dx^2)+x(b_1+2c_1x+3d_1x^2)=T(p(x))+T(p_1(x))\quad\dots(1)$$

$\alpha\in\mathbb{R}$

$$T(\alpha p(x))=x(\alpha(a+bx+cx^2+dx^3))'=\alpha x\cdot(b+2cx+3dx^2)=\alpha T(p(x))\quad\dots(2)$$

Na osnovu (1) i (2) možemo zaključiti da je T linearni operator.

(b) Izračunajmo $A[g(x)]_\mathcal{B}$ gdje je A matrica koordinata od T.

$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$\Rightarrow \quad [q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad T(p(x)) = bx + 2cx^2 + 3dx^3$

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_{\mathcal{B}} & [T(x)]_{\mathcal{B}} & [T(x^2)]_{\mathcal{B}} & [T(x^3)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$T(1) = 0 \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad T(x^2) = 2x^2 \Rightarrow [T(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(x) = x \Rightarrow [T(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad T(x^3) = 3x^3 \Rightarrow [T(x^3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A[q(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ 2q_2 \\ 3q_3 \end{pmatrix}$$

\# Zadana je linearna transformacija $T: \mathcal{P}_2 \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a-2b & b+c \\ -2a-4c & -2a+4b \end{pmatrix}$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odrediti matricu koordinata $[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}'}$ gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ redom baze za $\mathcal{P}_2$ i $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$) te odredite po jednu bazu za jezgru i sliku od T ($\mathcal{P}_2$ je prostor realnih polinoma stupnja ≤ 2).

Rj: Prisjetimo se

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada je (za $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$)

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Standardna baza za $\mathcal{P}_2$ je $\mathcal{S} = \{1, t, t^2\}$, a standardna baza za $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ je $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Prvo odredimo $T(1)$, $T(t)$ i $T(t^2)$:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad i \quad T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sad nije teško odrediti $[T(1)]_{\mathcal{S}'}$, $[T(t)]_{\mathcal{S}'}$ i $[T(t^2)]_{\mathcal{S}'}$ pa imamo

$$[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ostalo je još da odredimo po jednu bazu za jezgru i sliku od T.

$$\operatorname{im}(T) = \{Tp \mid p \in \mathcal{P}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} a-2b & b+c \\ -2a-4c & -2a+4b \end{bmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} c \ \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Baza za $\operatorname{im}(T)$ je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\ker(T) = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid T(p) = 0\} = \left\{ a+bt+ct^2 \ \middle| \ \begin{pmatrix} a-2b & b+c \\ -2a-4c & -2a+4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a odavde vidimo da ćemo a, b i c odrediti iz sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ jednu promjenljivu uzimamo proizvoljno

$$\begin{matrix} a+2c=0 \\ b+c=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=-2c \\ b=-c \end{matrix}$$

$$\ker(T) = \{-2\alpha - \alpha t + \alpha t^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{\underbrace{-2-t+t^2}_{\text{baza za } \ker(T)}\}.$$

(#) Dat je linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisan na sljedeći način

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix}.$$

(a) Odrediti njegovu sliku i jezgru, te njihove baze.

(b) Ako je $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ x = y \right\}$ i

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \right\}$$

odrediti $\mathcal{M}$ i bazu za njega.

Rj.

(a) $$\operatorname{im}(A) = \left\{ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix} \middle| \ x,y,z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} z \ \middle| \ x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ x+y=0,\ y-z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \qquad ;\ z=y \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Time smo dobili da je

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Odredimo još baze za ova dva prostora. Prisjetimo se:

Ako je U bilo koja matrica u red ešelon obliku dobijena iz A tada

osnovne kolone u A generišu $im(A)$

Kolone iz opšteg rješenja sistema $Ax=0$ generišu $ker(A)$.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\0\\y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\overset{\text{osnovne red operacije}}{\sim}\dots\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$x+z=0$
$y-z=0$

Baza za $im(A)$ je $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, a baza za $ker(A)$ je $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(b) $\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=y\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\z\end{pmatrix}\,\middle|\, x,z\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{L}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix}x+y\\0\\y-z\end{pmatrix}\in\mathcal{L}\right\}=$

$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-y\\y\\z\end{pmatrix}\,\middle|\, y,z\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Prema tome $\mathcal{M}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, a baza za $\mathcal{M}$ je $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Zadano je preslikavanje $T: V^3(O)\to V^3(O)$ izrazom

$$T(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})=(a-2b+c)\vec{i}+3a\vec{j}-(2a-4c)\vec{k}.$$

Dokazati da je T linearni operator i odredite mu matrični prikaz u bazi $\mathcal{B}=\{\vec{i}-\vec{j},\ 2\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}+\vec{k}\}$ (drugim riječima odredite $[T]_{\mathcal{B}}$).

Rj. Zbog jednostavnijeg zapisa umjesto vektorskog prostora $V^3(O)$ posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^3$ i preslikavanje $T':\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definisano sa

$$T'\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2b+c\\3a\\-2a+4c\end{pmatrix}$$

Pokažimo prvo da je T' linearni operator, tj. da je T' linearna f-ja sa $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}^3$. Drugim riječima da vrijedi

$$T'\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)=T'\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+T'\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad i\quad T\left(\alpha\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=\alpha T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\forall\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3;\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$T'\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)=T'\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)-2(a_2+b_2)+(a_3+b_3)\\3(a_1+b_1)\\-2(a_1+b_1)+4(a_3+b_3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_1-2a_2+a_3\\3a_1\\-2a_1+4a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1-2b_2+b_3\\3b_1\\-2b_1+4b_3\end{pmatrix}=T'\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+T'\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$T'\left(\alpha\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=T'\begin{pmatrix}\alpha a\\\alpha b\\\alpha c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a-2\alpha b+\alpha c\\3\alpha a\\-2\alpha a+4\alpha c\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}a-2b+c\\3a\\-2a+4c\end{pmatrix}=\alpha T'\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Time smo dokazali da je T' linearni operator. Kako iste osobine vrijede i za T, možemo zaključiti da je i T linearni operator.

Odredimo još matrični prikaz (matricu koordinata) operatora T u bazi $\mathcal{B}$. Drugim riječima odredimo ($\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$)

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}} & [T(u_3)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Zbog jednostavnosti zapisa umjesto $\mathcal{B}=\{\vec{i}-\vec{j}, 2\vec{i}+\vec{j}, \vec{i}+\vec{k}\}$ promatrajmo $\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, i odredimo $[T']_{\mathcal{B}'}$.

$$[T']_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[T'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} & \left[T'\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} & \left[T'\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$T'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2(-1)+0\\3\cdot(-1)\\-2\cdot1+4\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left[T'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}11/3\\2/3\\-2\end{pmatrix}$$

$$T'\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2\cdot1+0\\3\cdot2\\-2\cdot2+4\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left[T'\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-8/3\\10/3\\-4\end{pmatrix}$$

$$T'\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2\cdot0+1\\3\cdot1\\-2\cdot1+4\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left[T'\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{11}{3} & -\frac{8}{3} & -2\\ \frac{2}{3} & \frac{10}{3} & 1\\ -2 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

$[T(u)]_{\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}'}$

Naravno, $[T]_{\mathcal{B}}$ se mogao odrediti i na drugi način. KAKO?

U prostoru svih realnih nizova $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\{(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,a_{n+1},\dots) \mid a_i\in\mathbb{R}, i\in\mathbb{N}\}$) zadan je skup

$$\mathcal{L}=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2}-2a_n=0,\ n\in\mathbb{N}\}$$

Dokazati da je preslikavanje $T:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ koje nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pridružuje niz $(a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ (tj. niz sa općim članom a_{n+2}) linearni operator. Odredite matricu operatora $T:\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ (matricu koordinata) u bazi $\mathcal{B}=\{(1,0,2,0,4,0,8,\dots),(0,1,0,2,0,4,0,8,\dots)\}$.

Rj: Da bi pokazali da je T linearni operator potrebno je i dovoljno pokazati da $\forall (a_n),(b_n)\in\mathcal{L}$ i $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$T((a_n)+(b_n)) = T(a_n)+T(b_n) \quad i \quad T(\alpha(a_n))=\alpha T(a_n).$$

$$T((a_n)+(b_n)) = T((a_n+b_n)) = (a_{n+2}+b_{n+2}) = (a_{n+2})+(b_{n+2}) = T(a_n)+T(b_n)$$

$$T(\alpha(a_n)) = T((\alpha a_n)) = (\alpha a_{n+2}) = \alpha(a_{n+2}) = \alpha T(a_n)$$

$\Rightarrow$ T jest linearni operator.

Ostalo je još da odredimo $[T]_{\mathcal{B}}$. Prema definiciji

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T((1,0,2,0,4,0,8,0,\dots))]_{\mathcal{B}} & [T((0,1,0,2,0,4,0,8,\dots))]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

Primjetimo da niz $(1,0,2,0,4,0,8,0,\dots)$ možemo kraće zapisati sa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gdje je $a_n=\begin{cases}2^k, & 2k+1=n\\ 0, & 2k=n\end{cases}$.

$$T((1,0,2,0,4,0,8,0,\ldots)) = (2,0,4,0,8,0,10,0,\ldots)$$ (prvom član pridružuje treći, drugom četvrti, trećem peti, ...)

$$T((0,1,0,2,0,4,0,8,\ldots)) = (0,2,0,4,0,8,0,10,\ldots)$$

Dva niza iz baze $\mathcal{B}$ označimo sa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Primjetimo da vrijedi

$$T((1,0,2,0,4,0,\ldots)) = 2\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$T((0,\tfrac{1}{2},0,1,0,2,0,4,\ldots)) = 2\,(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(#) Zadan je linearni operator $T: \mathcal{P}_3 \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 - a_2 & a_0 + 2a_1 - a_2 \\ a_3 & a_0 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Prikažite operator T u paru standardnih baza, te mu odredite $\ker(T)$, $\mathrm{im}(T)$, rang $\rho(T)$ i defekt $\delta(T)$ (rang i defekt linearnog preslikavanja T označavamo redom sa $\rho(T)$ i $\delta(T)$ i definiramo sa $\rho(T) = \dim \mathrm{im}(T)$, $\delta(T) = \dim \ker(T)$). ($\mathcal{P}_3$ je prostor polinoma stepena ≤ 3).

Rj. Standardna baza za $\mathcal{P}_3$ je $\{1, t, t^2, t^3\}$, a standardna baza za $Mat_{2\times 2}$ je $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

Prisjetimo se:

Ako su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ redom baze za U i V tada

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \ldots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Kako je $T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T(t^2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$T(t^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ to je

$$[T]_{\mathcal{S}\mathcal{S}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ operator T u paru standardnih baza

gdje su $\mathcal{S} = \{1, t, t^2, t^3\}$, $\mathcal{S}' = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$,

Prema definiciji

$$\ker T = \{ p \in \mathcal{P}_3 \mid T(p) = 0 \}.$$

Ako ovo drugačije napišemo imamo

$$\ker T = \left\{ a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \;\middle|\; a_0+a_3-a_2=0,\ a_0+2a_1-a_2=0,\ a_3=0,\ a_0-a_2=0 \right\}$$

$$= \left\{ a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow$ jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $a_2 = s$.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}$$

$\ker(T) = \{ a + at^2 \mid a \in \mathbb{R} \}$ jezgro operatora T $\Rightarrow \dim \ker(T) = 1$

$\Rightarrow \rho(T) = 1$

Prema definiciji $\operatorname{im}(T) = \{ T(p) \mid p \in \mathcal{P}_3 \} = \{ T(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3) \mid a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R} \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_0+a_3-a_2 & a_0+2a_1-a_2 \\ a_3 & a_0-a_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$ pa posmatrajmo skup

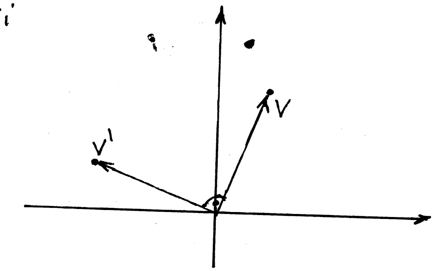
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_0+a_3-a_2 \\ a_0+2a_1-a_2 \\ a_3 \\ a_0-a_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Prisjetimo se da <u>osnovne kolone u A generišu $\operatorname{im}(A)$</u>.

Prema tome

$$\operatorname{im}(T) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \delta(T) = 3.$$

\# Neka je R rotacija, za ugao od $90°$ čiji je centar rotacije koordinatni početak, koja preslikava svaku tačku $v \in \mathbb{R}^2$ u odgovarajuću tačku $v' \in \mathbb{R}^2$ kao što je prikazano na slici

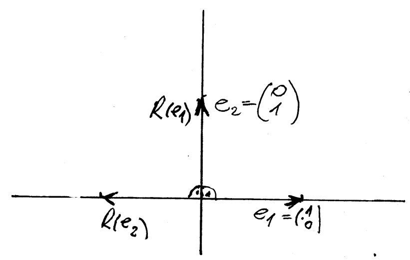


a) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti rotaciju tačke $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ za ugao od $90°$ čiji je centar rotacije koordinatni početak.

Rj. R je u stvari linearni operator na $\mathbb{R}^2$.

a) Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ e_1, e_2 \}$.



Primijetimo da je $R(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$ (vidi sliku) i $R(e_2) = R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$

Znamo da $[R]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [R(e_1)]_{\mathcal{S}} & [R(e_2)]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Pa je $[R]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Iz teorije linearne algebre znamo

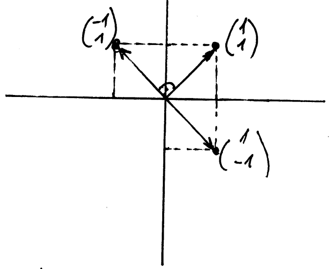
Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za vektorske prostore $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, i neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}$$

U našem slučaju

$$\left[P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi = [P]_\varphi \cdot \left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$$

c) Odrediti koordinate rotacije R u odnosu na bazu $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.



Rj. $\varphi' = \left\{\underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}\right\}$

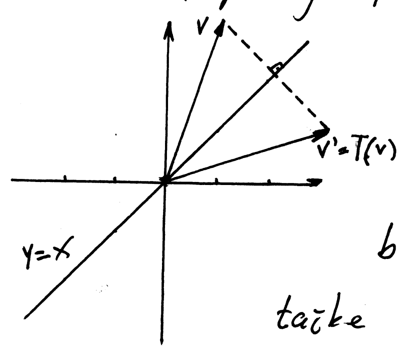
$$[R]_{\varphi'} = \left(\left[R\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \quad \left[R\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \right)$$

$R\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ (vidi sliku) $\qquad R\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot u_1$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -u_2$$

$$[R]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

(#) Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^2$ preslikava osnom simetrijom s osom u pravoj $y=x$ u vektor v' (vidi sliku).



a) Odrediti matricu koordinata T u odnosu na standardnu bazu.

b) Odrediti (koordinate) osnu simetriju tačke $v = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ s osom u pravoj $y=x$.

c) Odrediti koordinate osne simetrije T (odrediti matricu operatora T) u odnosu na baze $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Rj. a) Prisjetimo se

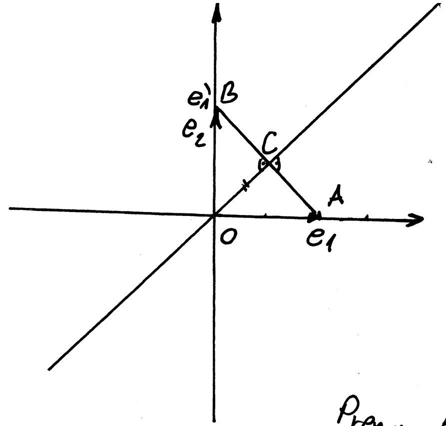
Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m \times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left([T(u_1)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} \quad \dots \quad [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \right).$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Standardna baza za $\mathbb{R}^2$ je $\varphi = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \{e_1, e_2\}$ i da bi odredili $[T]_\varphi$ trebamo pronaći $[T(e_1)]_\varphi$ i $[T(e_2)]_\varphi$.



Pa posmatrajmo kako T djeluje na e_1 i e_2

$T(e_1) = e_1'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong CB \\ \sphericalangle OCA \cong \sphericalangle OCB \\ OC \cong OC \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle OAC \cong \triangle OCB$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{e_1}{OA} = \underset{e_2}{OB}$$

Prema tome imamo

$$T(e_1) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$
$$T(e_2) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

$$[T]_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ tražena matrica koordinata.

b) Prisjetimo se

Djelovanje kao matrično množenje

Neka je $T \in \mathcal{L}(U, V)$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze za U i V redom. Za $\forall u \in U$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}}.$$

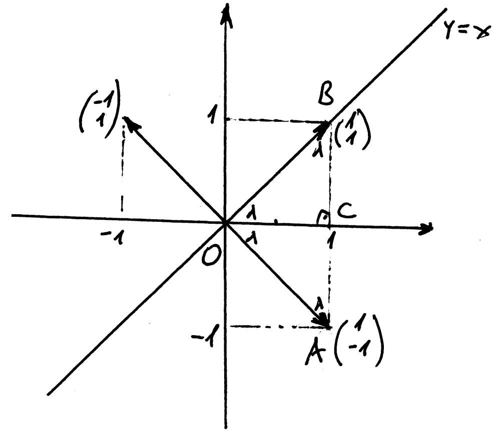
Mi u stvari tražimo $\left[T\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi = [T]_\varphi \cdot \left[\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}\right]_\varphi =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta \\ \alpha\end{pmatrix}$$

Osna simetrija tačke $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ s osom u pravoj $y = x$ je tačka $\begin{pmatrix}\beta \\ \alpha\end{pmatrix}$.

c) Trebamo pronaći $[T]_{\varphi'}$ gdje je $\varphi' = \left\{ \underset{e_1'}{\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}}, \underset{e_2'}{\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}} \right\}$.

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} & \left[T\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} \\ | & | \end{pmatrix}.$$



Primjetimo da je vektor $\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$ okomit na pravu $y = x$. Zato

OAC jkk pravougli

OCB jkk pravougli

$2\lambda = 90°$

$\lambda = 45°$

Sad primjetimo da je $T\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2'$

$$T\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix} = 0 \cdot e_1' + (-1) \cdot e_2'$$

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ traženo rješenje

Provjera:

$$\left[\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = 1 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ -1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}-1 \\ 1\end{pmatrix}\right]_{\varphi'}$$

(#) Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao od $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y=x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Odrediti koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

R: Prisjetimo se

Matrica koordinata (matrica operatora)

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matricu koordinata od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

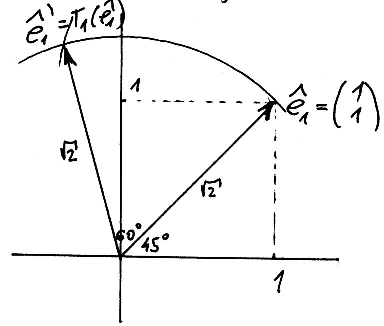
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Ako elemente baze $\mathcal{B}$ označimo sa $\hat{e}_1$ i $\hat{e}_2$ mi u stvari tražimo

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} | & | \\ [T(\hat{e}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\hat{e}_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo prvo rotaciju za $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru - i ovaj operator označimo sa T_1.

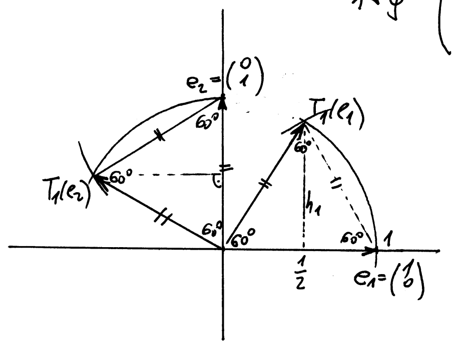


Primjetimo da je $T(\hat{e}_1)$ teško izračunati direktnim putem.

Da bi izračunali $T(\hat{e}_1)$ koristit ćemo standardnu bazu $\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ i sljedeću Teoremu:

Neka je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada za $\forall u\in\mathcal{U}$ imamo $[T(u)]_{\mathcal{B}'}=[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\cdot[u]_{\mathcal{B}}$

$\varphi=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad [T_1]_{\varphi}=\begin{pmatrix} | & | \\ [T_1(e_1)]_{\varphi} & [T_1(e_2)]_{\varphi} \\ | & | \end{pmatrix}$



$h_1^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ $\qquad h_2^2=1-\frac{1}{4}$

$h_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad h_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

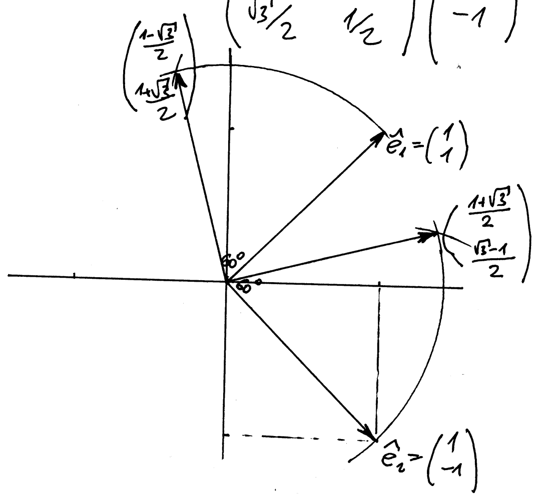
$$T_1(e_1)=\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}=[T_1(e_1)]_{\varphi}$$

$$T_1(e_2)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1/2\end{pmatrix}=[T_1(e_2)]_{\varphi}$$

Prema tome $[T_1]_{\varphi}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$. Sad imamo

$$[T_1(\hat{e}_1)]_{\varphi}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$[T(\hat{e}_2)]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$



Dalje nije teško pokazati da se proizvoljan vektor $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ osnom simetrijom s osom u pravoj $y = x$ preslikava u vektor $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

Prema tome $T(\hat{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$$T(\hat{e}_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Odredimo još koordinate od $T(\hat{e}_1)$ i $T(\hat{e}_2)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad [T(\hat{e}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$\alpha - \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$
$$+ \quad 2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$
$$2\beta = \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})}{2}$$
$$2\beta = \sqrt{3}$$
$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
$$\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$+ \quad 2\alpha = \frac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2}$$
$$2\alpha = \sqrt{3} \qquad \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$- : \quad 2\beta = \frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2}$$
$$2\beta = -1$$
$$\beta = -\frac{1}{2}$$

$$[T(\hat{e}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$ tražena matrica operatora

Neka je v proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^2$ npr. $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{3} \\ (\alpha+\beta)\sqrt{3}-(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$ tražene koordinate vektora $T(v)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

(#) Neka je T linearan operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y=-x$, zatim ga rotira za ugao $\frac{\pi}{4}$ oko koordinatnog početka (oko izvorišta) u negativnom smjeru, te zatim reflektuje (zrcali) s obzirom na pravac $y=x$. Naći matricu (matricu koordinata) operatora T u bazi $\mathcal{B}=\left\{2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Rj. Prisjetimo se

Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

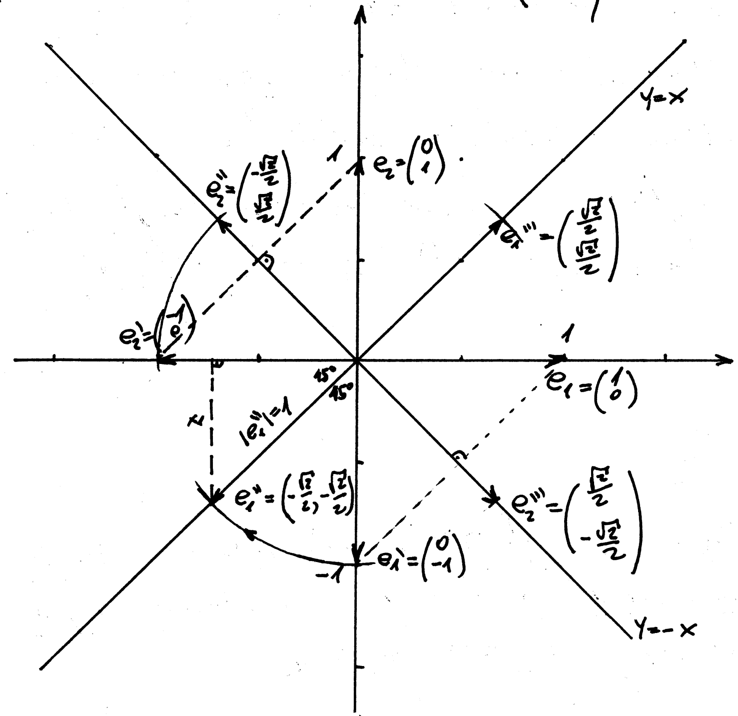
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

U našem slučaju $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

Puno je lakše prvo odrediti matricu linearnog operatora u odnosu na standardnu bazu $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$\mathcal{S}=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{e_2}\right\} \qquad [T]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_{\mathcal{S}} & [T(e_2)]_{\mathcal{S}} \\ | & | \end{pmatrix}$$



$\sin 45^\circ = \frac{x_1}{1}$

$x_1=\frac{\sqrt2}{2}$

Sa slike nije teško izračunati da je

$$[T(e_1)]_{\mathcal{S}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}}_{=T(e_1)}, \qquad [T(e_2)]_{\mathcal{S}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}}_{=T(e_2)}$$

Prisjetimo se

Djelovanje kao matrično množenje

Neka je $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ redom. Za $\forall u\in\mathcal{U}$

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\cdot[u]_{\mathcal{B}}$$

Nama treba matrica koordinata operatora T u bazi $\mathcal{B}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} & \left[T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

Ako vektore baze $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ označimo sa u_1 i u_2

tj. sa $u_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, da bi odredili $[T(u_1)]_{\mathcal{B}}$ i $[T(u_2)]_{\mathcal{B}}$

koristimo formule

$$[T(u_1)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\varphi\mathcal{B}} \cdot [u_1]_{\varphi}$$

$$[T(u_2)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\varphi\mathcal{B}} \cdot [u_2]_{\varphi}$$

Znamo $[u_1]_{\varphi} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ i $[u_2]_{\varphi} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Odredimo još $[T]_{\varphi\mathcal{B}}$

$$[T]_{\varphi\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(e_1)]_{\mathcal{B}} & [T(e_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}$$

Tražimo α i β t.d. $\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ZA VJEŽBU ... $\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow [T(e_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

Pa sad tražimo npr γ i δ t.d. $\gamma\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ZA VJEŽBU ... $\Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\beta = \frac{-\sqrt{2}}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [T(e_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{6}\\ -\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T]_{\varphi\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$$

Na kraju imamo

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5\sqrt{2}}{6}\\ \frac{7\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{6}\\ -\frac{5\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{5\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\\ \frac{7\sqrt{2}}{6} & -\frac{5\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$$

(#) Neka je

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

matrica linearnog operatora $T: V^2(O) \to V^2(O)$ u kanonskoj bazi $\{\vec{i}=\binom{1}{0}, \vec{j}=\binom{0}{1}\}$. Odrediti matricu operatora T u bazi $\{\vec{i}+2\vec{j}, \vec{i}+3\vec{j}\}$. Da li postoji vektor $\vec{v}\in V^2(O)$ takav da je $T(\vec{v})=3\vec{i}+5\vec{j}$?

Rj.

Prisjetimo se sljedeće teoreme

Promjena matrice koordinata

Neka je A linearni operator na V, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V. Koordinate matrice $[A]_{\mathcal{B}}$ i $[A]_{\mathcal{B}'}$ su povezani na sljedeći način

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P, \quad \text{gdje je} \quad P=[I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$. Ekvivalentno

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q, \quad \text{gdje je} \quad Q=[I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}=P^{-1}$$

matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$.

Označimo sa φ i φ' sljedeće dvije baze $\varphi=\{\vec{i},\vec{j}\}$, $\varphi'=\{\vec{i}+2\vec{j}, \vec{i}+3\vec{j}\}$. Iz postavke zadatka nam je dato $[T]_\varphi$ tj.

$$[T]_\varphi = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}.$$

Ono što trebamo odrediti je $[T]_{\varphi'}$. Prema teoremi iznad

$$[T]_{\varphi'} = Q^{-1}[T]_\varphi Q \quad \text{gdje je} \quad Q=[I]_{\varphi'\varphi}.$$

$$[I]_{\varphi'\varphi} = \left([\vec{i}+2\vec{j}]_\varphi \quad [\vec{i}+3\vec{j}]_\varphi\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 9 & 13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Prema tome matrica operatora T u bazi $\varphi'=\{\vec{i}+2\vec{j}, \vec{i}+3\vec{j}\}$ je

$$[T]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Prisjetimo se

Djelovanje operatora kao množenje matricom

Neka je $T\in \mathcal{L}(U,V)$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom dvije baze za U i V. Za svaki $u\in U$ djelovanje od T na u je dato sa

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}$$

Prema postavci zadatka mi tražimo vektor $\vec{v}$ za koji vrijedi $[T(\vec{v})]_\varphi = \binom{3}{5}$. Prema teoremi iznad znamo $[T(\vec{v})]_\varphi = [T]_{\varphi'\varphi}[\vec{v}]_{\varphi'}$

$$[T]_{\varphi'\varphi} = \left([T(\vec{i}+2\vec{j})]_\varphi \quad [T(\vec{i}+3\vec{j})]_\varphi\right).$$

Kako je

$$[T]_\varphi = \left([T(\vec{i})]_\varphi \quad [T(\vec{j})]_\varphi\right) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix} \quad \text{to je}$$

$$T\binom{x}{y} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\binom{x}{y} = (2x+y)+(x+4y) = 3x+5y$$

Time tražeći vektor $\vec{v}$ za koji vrijedi $T(\vec{v})=3\vec{i}+5\vec{j}$ je $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$.

Odrediti sve podprostore od $\mathbb{R}^2$ koji su invarijantni u odnosu na $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Rj. Podprostori od $\mathbb{R}^2$ mogu biti dimenzije 0, 1 i 2.

- Trivijalni podprostor $\{\mathbf{0}\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ je jedini nula-dimenzionalni prostor pa je on i jedini nula-invarijantan podprostor od $\mathbb{R}^2$.

Podprostor od $\mathbb{R}^2$ koji je dimenzije 2 mora biti sam $\mathbb{R}^2$ (zašto?). Pa je $\mathbb{R}^2$ jedini dvo-dimenzionalni invarijantan podprostor.

Pravi problem predstavlja pronaći sve jedno-dimenzionalne invarijantne podprostore.

Posmatrajmo jednodimenzionalan podprostor M koji je generisan sa $x\neq 0$ ($M=\operatorname{span}\{x\}=\{\alpha x \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$) takav da je $A(M)\subseteq M$. Tada

$$Ax\in M \Rightarrow \exists \text{ skalar } \lambda \text{ takav da } Ax=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda I)x=0.$$

Drugim riječima $M\subseteq \ker(A-\lambda I)$. Kako je $\dim M=1$, mora biti slučaj da $\ker(A-\lambda I)\neq 0$ i λ mora biti skalar takav da je $(A-\lambda I)$ singularna matrica.

Pitanje: Zašto $(A-\lambda I)$ ne smije biti nesingularna matrica?

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\overset{I_v\leftrightarrow II_v}{\sim}\begin{pmatrix}-2 & 3-\lambda\\ -\lambda & 1\end{pmatrix}\overset{II_v+I_v\cdot\frac{-\lambda}{2}}{\sim}\begin{pmatrix}-2 & 3-\lambda\\ 0 & 1+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2}\end{pmatrix}$$

A odavde vidimo da će $A-\lambda I$ biti singularna matrica akko $1+\frac{\lambda^2-3\lambda}{2}=0$ tj. akko je λ korijen od

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Prema tome $\lambda=1$ i $\lambda=2$ i direktno računanje povlači dva jedno-dimenzionalna invarijantna podprostora

$$M_1=\ker(A-I)=\ker\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

i $M_2=\ker(A-2I)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ i ovo su tražena rješenja.

Usput, primjetimo da $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ je baza za $\mathbb{R}^2$ i $[A]_{\mathcal{B}}=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ gdje $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

U opštem slučaju, skalare λ za koje $(A-\lambda I)$ je singularna zovemo svojstvene vrijednosti od A, i nenula vektore u $\ker(A-\lambda I)$ su poznati kao svojstveni vektori za A. Kao što ovaj primjer pokazuje, svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori su od velike važnosti u identificiranju invarijantnih podprostora i u svođenju matrica pomoću transformacija sličnosti.

(#) Zadan je linearni operator $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ sa

$$T(a+bt+ct^2) = a+b+c+(a+3b)t+(a-b+2c)t^2$$

Odrediti sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na operator T.

Rj.

Invarijantni potprostori

Neka je T linearni operator na $\mathcal{V}$. Za potprostor $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ kažemo da je invarijantan potprostor u odnosu na T akko $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.

Označimo sa $\mathcal{M}$ jednodimenzionalni potprostor prostora $\mathcal{P}_2$ koji je invarijantan u odnosu T. Neka je

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{p(t)\}.$$

Kako je $\mathcal{M}$ invarijantan u odnosu na T to znači da je

$$T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}.$$

Drugim riječima za $\forall g \in \mathcal{M}$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.d. $T(g) = \alpha p$.
Ali kako je $g \in \mathcal{M}$ to se g može prikazati kao linearna kombinacija polinoma iz $\{p\}$.
Prema tome da bi odredili sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na T dovoljno je posmatrati samo bazu $\{p\}$.

Radi jednostavnijeg zapisa umjesto transformacije T posmatrajmo transformaciju $T': \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisanu sa

$$T'\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+3b \\ a-b+2c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Neka je $\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right\}$ baza za $\mathcal{M}$. Tada $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.d.

$$T'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \begin{array}{c} Aa = \lambda a \\ Aa - \lambda a = 0 \\ (A - \lambda I)a = 0 \\ a \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda(\lambda-3)^2 \qquad \begin{array}{c} -\lambda(\lambda-3)^2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3 \end{array}$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xRightarrow[\text{uz. proizv.}]{\text{1 prom.}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s \\ \frac{1}{2}s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda_2 = 3$:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xRightarrow[\text{uzim. proizv.}]{\text{1 prom.}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Jednodimenzionalni potprostori koji su invarijantni u odnosu na operator T su

$$\mathcal{M}_1 = \operatorname{span}\left\{-\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}t + t^2\right\} \quad i \quad \mathcal{M}_2 = \operatorname{span}\left\{-t + t^2\right\}.$$

(#) Zadan je linearni operator $T: Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b & 4a-4b \\ -a+2b+c & b+c \end{pmatrix}.$$

Odrediti sve jednodimenzionalne potprostore koji su invarijantni u odnosu na operator T.

Rj: Prisjetimo se

<u>Invarijantni potprostor</u>

<u>Za potprostor $X \leq V$ kažemo da je invarijantan potprostor u odnosu na T (T je linearni operator na V) akko</u>

$$T(X) \subseteq X$$

Mi trebamo odrediti (pronaći) potprostor M dimenzije 1 koji je invarijantan u odnosu na T.

Neka je $M = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right\}$ gdje je $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ tražena baza.

$$T(M) \subseteq M \overset{M=\text{span}\{A\}}{\Longrightarrow} \forall B \in M \quad T(B) = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

gdje je $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ baza za M. Ali kako je $B \in M$ to se B može prikazati kao linearna kombinacija matrica iz $\underbrace{\;}_{\text{baze od}}$ M tj. $\exists \beta \in \mathbb{R}$ t.d. $B = \beta \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$. Prema tome

$$T(B) = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta\, T\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1-a_2 & 4a_1-4a_2 \\ -a_1+2a_2+a_3 & a_2+a_3 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\beta} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \overset{\lambda = \frac{\alpha}{\beta}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{aligned} a_1-a_2 &= \lambda a_1 \\ 4a_1-4a_2 &= \lambda a_2 \\ -a_1+2a_2+a_3 &= \lambda a_3 \\ a_2+a_3 &= \lambda a_4 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Ca = \lambda a \Rightarrow (C - \lambda I)a = 0, \quad a \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2(\lambda-1)\cdot(\lambda+3)$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\overline{C} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\text{2 pr. uz pr.}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R}$$

upr $a_3 = s,\ a_4 = t,\ s,t \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 = 1$:

$$\overline{C} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\text{upr } x_4 = s}{\overset{\text{1 pr. uz pr.}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$\lambda_3 = -3$:

$$\overline{C} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\text{upr } x_4 = 3s}{\overset{\text{1 pr. uz pr.}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s \\ -16s \\ 7s \\ 3s \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Jednodimenzionalni potprostori koji su invarijantni u odnosu na operator T su

$$M_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad M_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \quad i$$

$$M_3 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -4 & -16 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

Izračunati 1-, 2- i ∞-norme vektora $x=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ i $y=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\1\\4i\end{pmatrix}$.

Rj:

$$\|x\|_p \stackrel{def}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

Za $x=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ imamo

$$\|x\|_2 = \left(4+1+16+4\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|x\|_1 = 2+1+4+2 = 9$$

$$\|x\|_\infty = \max\{2,1,4,2\} = 4$$

Za $y=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\1\\4i\end{pmatrix}$ imamo

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|4i| = \sqrt{16+0} = 4$$

$$\|y\|_2 = \left(2+2+1+16\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{21}$$

$$\|y\|_1 = \sqrt{2}+\sqrt{2}+1+4 = 2\sqrt{2}+5$$

$$\|y\|_\infty = \max\{\sqrt{2},\sqrt{2},1,4\} = 4$$

Primijetimo da je

$$\|x\|_\infty < \|x\|_2 < \|x\|_1$$

$$\|y\|_\infty < \|y\|_2 < \|y\|_1$$

Ako je $x,y\in\mathbb{R}^n$ tako da $\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2$, šta je $x^T y$?

Rj:

$$\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2 \quad /^2$$

$$\|x-y\|_2^2 = \|x+y\|_2^2$$

$$(x-y)^T(x-y) = (x+y)^T(x+y)$$

$$(x^T-y^T)(x-y) = (x^T+y^T)(x+y)$$

$$x^Tx - x^Ty - y^Tx - y^Ty = x^Tx + x^Ty + y^Tx + y^Ty$$

$$\|x\|_2^2 - x^Ty - x^Ty - \|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + x^Ty + x^Ty + \|y\|_2^2$$

$$-2x^Ty = 2x^Ty$$

$$4x^Ty = 0$$

$$x^Ty = 0$$

Posmatrajmo vektorski prostor $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m\times n$ matrica. Pokazati da je f-ja definisana sa

$$\langle A,B\rangle = \text{trag}(A^T B)$$

unutrašnji proizvod za $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(Ovaj proizvod je poznat pod imenom standardni unutrašnji proizvod za matrice). $\boxed{\text{trag}(A) = \text{suma dijagonalnih elemenata matrice } A}$

Rj: Trebamo provjeriti da li vrijede četri osobine unutrašnjeg proizvoda.

(i) $\langle A,A\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle A,A\rangle \geq 0$ i $\langle A,A\rangle = 0$ akko $A = \mathbf{0}$.

$$\langle A,A\rangle = \text{trag}(A^T A) = \text{trag}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2) + \dots + (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{nn}^2) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ij}^2}_{\in\mathbb{R}}}_{\in\mathbb{R}} \geq 0$$ i vidimo da $\langle A,A\rangle = 0$ akko $A = \mathbf{0}$

vrijedi prva osobina

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ za svaki skalar α

$$\langle A,\alpha B\rangle = \text{trag}(A^T\cdot\alpha B) = \alpha\,\text{trag}(A^T B) = \alpha\langle A,B\rangle$$

vrijedi druga osobina

(iii) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

Primjetimo da je $\text{trag}(A^T B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ (ZAŠTO?)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21}+\dots+a_{n1}b_{n1} & \square & \dots & \square \\ \square & a_{12}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{n2}b_{n2} & & \square \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \square & \square & \dots & a_{1n}b_{1n}+\dots+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\langle A,B+C\rangle = \text{trag}(A^T(B+C)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}+c_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \text{trag}(A^T B) + \text{trag}(A^T C)$$

$$= \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$$ vrijedi treća osobina

(iv) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (za kompleksan vekt. prost. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$)

ZA VJEŽBU

Data f-ja jest unutrašnji proizvod na realnom vektorskom prostoru $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(#) Data je matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. U $\mathbb{R}^n$ definirajmo proizvod sa

$$\langle x, y\rangle = (Ax)^T Ay$$

(a) Diskutovati za kakve matrice A, dati proizvod je unutrašnji proizvod.

(b) Diskutovati za kakve matrice A, za dati proizvod vrijedi jednakost $\langle x,y\rangle = x^T y$.

Rj. (a) Trebamo provjeriti da li vrijede četiri osobine unutrašnjeg proizvoda

(i) $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ i $\langle x,x\rangle = 0$ akko $x=0$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \Rightarrow Ax=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$

pa elemente od Ax označimo sa $Ax=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$.

$$\langle x,x\rangle = (Ax)^T Ax = (c_1\ c_2 \dots c_n)\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix} = c_1^2+c_2^2+\dots+c_n^2 \in \mathbb{R}$$
$$\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

$\langle x,x\rangle = 0$ akko $c_1^2+c_2^2+\dots+c_n^2=0$ akko $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ akko

$$Ax=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=0\end{matrix} \Leftrightarrow x=0$$

(a ovo je tačno akko je A nesingularna matrica

tj. ako A ima inverz $\Leftrightarrow$ ako je matrica A ranga n)

Prema tome da bi vrijedila prva osobina matrica A mora biti nesingularna matrica.

(ii) $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ za $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$$\langle x,y\rangle = (Ax)^T(\alpha Ay) = (Ax)^T\alpha(Ay) = \alpha(Ax)^T(Ay) = \alpha\langle x,y\rangle$$

vrijedi druga osobina

(iii) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

$$\langle x,y+z\rangle = (Ax)^T A(y+z) = (Ax)^T(Ay+Az) = (Ax)^T(Ay)+(Ax)^T(Az)$$
$$= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \Rightarrow \text{vrijedi treća osobina}$$

(iv) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ (za realan prostor $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$)

$$\langle x,y\rangle = (Ax)^T Ay = \underbrace{(c_1\ c_2 \dots c_n)}_{=(Ax)^T}\underbrace{\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}}_{=Ay} =$$

$$= (d_1\ d_2 \dots d_n)\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix} = (Ay)^T Ax = \langle y,x\rangle$$

vrijedi četvrta osobina

Za nesingularne matrice A dati proizvod je unutrašnji proizvod.

(b) Da bi vrijedilo $\langle x,y\rangle = x^T y$ primijetimo da mora biti

$$(Ax)^T Ay = x^T y \Leftrightarrow x^T A^T A y = x^T y \Leftrightarrow A^T A = I$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$$

Da bi vrijedila data jednakost matrica A mora biti ortogonalna matrica. ✓

\# Posmatrajmo sljedeći skup od tri vektora

$$\left\{ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Koristeći standardni unutrašnji proizvod u $\mathbb{R}^4$ provjeriti da li su ovi vektori međusobno ortogonalni.

(b) Pronaći nenula vektor x_4 tako da je $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ skup međusobno ortogonalnih vektora.

(c) Pretvoriti dobijeni skup u ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^4$.

R: (a) Dva vektora u i v su međusobno ortogonalna akko $\langle u,v\rangle = 0$, što označavamo sa $u \perp v$.

za $\mathbb{R}^4$ $\quad \langle u,v\rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{4} u_i v_i$

$\langle x_1, x_2\rangle = 1-1+0+0 = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$

$\langle x_1, x_3\rangle = -1+1+0+0 = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_3$

$\langle x_2, x_3\rangle = -1-1+2+0 = 0 \Rightarrow x_2 \perp x_3$

Dati vektori su međusobno ortogonalni.

(b) Trebamo pronaći vektor $x_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ t.d. $x_1 \perp x_4$, $x_2 \perp x_4$, $x_3 \perp x_4$ tj. $x_1^T x_4 = 0$, $x_2^T x_4 = 0$ i $x_3^T x_4 = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{III_v + I_v}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{III_v + II_v}{\sim}$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rang} \bar{A} = 3 = \operatorname{rang} A < 4 =$ br. nepoznatih

sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

$\alpha_3 = 0$

$2\alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_4 = t$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0$

$\alpha_1 = -t$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\|x_1\| = \sqrt{1+1+0+4} = \sqrt{6}$, $\quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|x_2\| = \sqrt{1+1+1+0} = \sqrt{3}$, $\quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\|x_3\| = \sqrt{1+1+4+0} = \sqrt{6}$, $\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|x_4\| = \sqrt{1+1+0+1} = \sqrt{3}$, $\quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}^4$ je $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(#) Dat je vektorski podprostor $\mathcal{L}$ vektorskog prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definisan sa

$$\mathcal{L}=\left\{A\in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AX-XA=0,\ X=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}\right\}.$$

Posmatrajući standardni unutrašnji proizvod za matrice

$$\langle A,B\rangle = trag(A^TB)$$

odrediti ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

Rj.

Da bi odredili ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$ prvo je potrebno pronaći bilo kakvu bazu za $\mathcal{L}$

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} AX=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2b&a\\2d&c\end{bmatrix}\\ XA=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\2a&2b\end{bmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow AX-XA=\begin{bmatrix}2b-c&a-d\\2d-2a&c-2b\end{bmatrix}$$

$$AX-XA=0 \iff \begin{array}{c}2b-c=0\\a-d=0\\2d-2a=0\\c-2b=0\end{array} \iff \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&2&-1&0\\0&-2&1&0\\-2&0&0&2\end{bmatrix}}_{=B}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&2&-1&0\\0&-2&1&0\\-2&0&0&2\end{bmatrix} \underset{III_v+II_v}{\overset{IV_v+I_v\cdot 2}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&2&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c}a-d=0\\2b-c=0\\\hline a=d\\ b=\frac{c}{2}\quad c=2b\end{array}$$

Odavde sad nije teško vidjeti da se prostor $\mathcal{L}$ može napisati u obliku:

$$\mathcal{L}=\left\{\begin{bmatrix}d&b\\2b&d\end{bmatrix} \mid b,d\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\alpha+\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}\beta \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=span\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}\right\}$$

Baza za $\mathcal{L}$ je $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}\right\}$.

Sad iskoristimo Gram-Schmidtovu proceduru pa odredimo ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle u_i,x_k\rangle u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

$$X_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \|X_1\|=\sqrt{trag\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)}=\sqrt{2}$$

$$U_1\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$U_2 \leftarrow X_2-\langle U_1,X_2\rangle U_1$$

$$U_2 \leftarrow \frac{U_2}{\|U_2\|}$$

$$\langle U_1,X_2\rangle = trag(U_1^TX)=trag([$$

$$=trag\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$X_2=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$$

$$U_2 \leftarrow X_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\| U_2 \| = \sqrt{\operatorname{tray}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Ortonormirana baza za $\mathcal{L}$ je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(#) Zadan je unitarni prostor $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle A, B \rangle = \operatorname{tray}(A^T B)$ i neka je $\mathcal{L}$ vektorski podprostor prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definiran kao

$$\mathcal{L} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nađite ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$.

Rj. Da bi odredili ortonormiranu bazu za $\mathcal{L}$ koristimo Gram-Schmidtov proces ortonormalizacije.

Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $\quad u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $\quad u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

U našem slučaju imamo $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$U_1 \leftarrow \frac{X_1}{\|X_1\|}$$

$$U_2 \leftarrow X_2 - \langle U_1, X_2 \rangle U_1$$

$$U_2 \leftarrow \frac{1}{\|U_2\|} \cdot U_2$$

$$U_3 \leftarrow X_3 - \langle U_1, X_3 \rangle U_1 - \langle U_2, X_3 \rangle U_2$$

$$U_3 \leftarrow \frac{1}{\|U_3\|} U_3$$

$$\|X_1\|^2 = \langle X_1, X_1 \rangle = \mathrm{trag}(X_1^T X_1) = \mathrm{trag}\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right) = 9 + 18 = 27$$

$$\|X_1\| = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$$

$$U_1 \leftarrow \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle U_1, X_2 \rangle = \mathrm{trag}(U_1^T X_2) = \mathrm{trag}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(6+0) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\langle U_1, X_2 \rangle U_1 = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U_2 \leftarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|U_2\|^2 = \mathrm{trag}\left(4\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 4(5+4) = 36 \Rightarrow \|U_2\| = 6$$

$$U_2 \leftarrow \frac{1}{6} \cdot 2\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle U_1, X_3 \rangle = \mathrm{trag}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1+0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle U_2, X_3 \rangle = \mathrm{trag}\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}(-1-2) = -1$$

$$\langle U_1, X_3 \rangle U_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle U_2, X_3 \rangle U_2 = (-1) \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_3 \leftarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots$$ Ortonormirana baza za $\mathcal{L}$ je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

\# Dat je unitarni prostor $\mathcal{P}_3$, polinoma stepena ≤ 3, sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} p(\lambda_i) q(\lambda_i)$$

gdje su $\lambda_0 = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$. Primjenom Gram-Schmidtovog procesa ortonormirati bazu $\{-1, x, -x^2, x^3\}$ i dobiti polinome $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ koji su ortogonalni i za koje vrijedi da je $\|p_i\|^2 = p_i(\lambda_0)$, za $\forall i = 1,2,3,4$.

Rj. Prisjetimo se Gram-Šmitove ortogonalne procedure:
Ako je $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza za unitarni prostor $\mathcal{S}$, tada Gram-Šmitov niz definisan sa

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad i \quad u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i}{\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i\|} \quad \text{za } k = 2, 3, \ldots, n$$

je ortonormirana baza za $\mathcal{S}$.

Algoritam

za $k=1$: $\quad u_1 \leftarrow \frac{x_1}{\|x_1\|}$

za $k>1$: $\quad u_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k \rangle u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

Pa slijedimo ovaj algoritam i formirajmo prvo ortonormirane polinome r_0, r_1, r_2 i r_3.

Dat je skup $\{-1, x, -x^2, x^3\}$

$$g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4$$

$k=1$: $\quad r_1 \leftarrow \frac{g_1}{\|g_1\|}$

Kako je $\langle p, q \rangle = \frac{1}{4}\left(p(3)q(3) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(-3)q(-3)\right)$

to je

$$\|g_1\|^2 = \langle g_1, g_1 \rangle = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

$$\|g_1\| = \sqrt{1} = 1$$

$$r_1 \leftarrow \frac{-1}{1} = -1 \qquad r_1(x) = -1$$

$k=2$: $\quad r_2 \leftarrow g_2 - \langle r_1, g_2 \rangle r_1, \qquad r_2 \leftarrow \frac{r_2}{\|r_2\|}$

$-3 \quad -1 \quad 1 \quad 3$

$$\langle r_1, g_2 \rangle = \frac{1}{4}\left((-1)3 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-3)\right) = 0$$

$$r_2 \leftarrow x - 0 = x$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \frac{1}{4}(9+1+1+9) = 5 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{5}$$

$$r_2 \leftarrow \frac{x}{\sqrt{5}} \qquad r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x$$

$3, 1, -1, -3$

$r_1(x) = -1$

$r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x$

$g_3(x) = -x^2$

$k=3$: $\quad r_3 \leftarrow g_3 - \langle r_1, g_3 \rangle r_1 - \langle r_2, g_3 \rangle r_2$

$$\langle r_1, g_3 \rangle = \frac{1}{4}(9+1+1+9) = 5$$

$$\langle r_2, g_3 \rangle = \frac{1}{4}\left(-\frac{27}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{27}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$r_3 \leftarrow -x^2 + 5, \qquad \|-x^2+5\|^2 = \langle -x^2+5, -x^2+5 \rangle = \frac{1}{4}(16+16+16+16) = 16$$

$$\|-x^2+5\| = 4$$

$$r_3 \leftarrow \frac{1}{4}(-x^2+5) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4} \qquad r_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}$$

Za sad imamo

$$r_1(x) = -1, \quad r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x, \quad r_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}, \quad g_4 = x^3$$

$k=4$: $\quad r_4 \leftarrow g_4 - \langle r_1, g_4 \rangle r_1 - \langle r_2, g_4 \rangle r_2 - \langle r_3, g_4 \rangle r_3$

$$r_1 \cdot g_4 = -x^3$$

$$\langle r_1, g_4 \rangle = \frac{1}{4}(-27 - 1 + 1 + 27) = 0$$

$$r_2 \cdot g_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}x^4$$

$164 : 4 = 41$

$$\langle r_2, g_4 \rangle = \frac{1}{4}\left(\frac{81}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{81}{\sqrt{5}}\right) = \frac{41}{\sqrt{5}}$$

$$r_3 \cdot g_4 = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{5}{4}x^3$$

$$\langle r_3, g_4 \rangle = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}3^5 + \frac{5}{4}3^3 - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}3^5 - \frac{5}{4}3^5\right) = 0$$

$$r_4 \leftarrow x^3 - \frac{41}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}x = x^3 - \frac{41}{5}x$$

$$\left\|x^3 - \frac{41}{5}x\right\|^2 = \left\langle x^3 - \frac{41}{5}x, x^3 - \frac{41}{5}x \right\rangle = \dots = \frac{144}{5}$$

$$\left\|x^3 - \frac{41}{5}x\right\| = \frac{12}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{1}{\left\|x^3 - \frac{41}{5}x\right\|} = \frac{\sqrt{5}}{12}$$

$$r_4(x) = \frac{\sqrt{5}}{12}x^3 - \frac{41\sqrt{5}}{60}x$$

Skup $\left\{r_1(x) = -1,\ r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}x,\ r_3(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4},\ r_4(x) = \frac{\sqrt{5}}{12}x^3 - \frac{41\sqrt{5}}{60}x\right\}$ je ortonormirana baza prostora P_3 u odnosu na dati skalarni proizvod.

Ostalo je još da formiramo polinome $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ koji su ortogonalni i za koje vrijedi $\|p_i\|^2 = p_i(\lambda_0)$.

Primjetimo da za proizvoljne realne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i α_4 skup $\{\alpha_1 r_1, \alpha_2 r_2, \alpha_3 r_3, \alpha_4 r_4\}$ i dalje formira ortogonalan sistem.

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} r_1(x) = -1 \\ \|r_1\| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p_1(x) = 1 \quad (1 = \|p_1\|^2 = p_1(3) = 1)$$

$$(p_1(x) = (-1)\cdot r_1)$$

$r_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} x, \quad r_2(3) = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\|r_2\| = 1$

$$p_2(x) = \alpha \cdot r_2(x)$$

$$\|p_2\|^2 = \langle p_2, p_2\rangle = \alpha^2 \langle r_2, r_2\rangle = \alpha^2 \|r_2\|^2 = \alpha^2$$

$$p_2(\lambda_0) = p_2(3) = \alpha \cdot r_2(3) = \alpha \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha^2 = \frac{3}{\sqrt{5}}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$p_2(x) = \frac{3}{5}x \qquad \left(\frac{9}{5} = \|p_2\| = p_2(\lambda_0) = \frac{9}{5}\right)$$

$r_3 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}$

$\|r_3\| = 1$

$$p_3(x) = \beta r_3(x)$$

$$\|p_3\|^2 = \langle \beta r_3, \beta r_3\rangle = \beta^2 \langle r_3, r_3\rangle = \beta^2$$

$$p_3(\lambda_0) = p_3(3) = \beta\cdot\left(-\frac{1}{4}3^2 + \frac{5}{4}\right) = \beta\left(-\frac{4}{4}\right) = -\beta$$

$$\beta = -1$$

$$p_3(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4} \qquad (p_3(\lambda_0) = 1, \quad \|p_3\|^2 = 1)$$

$r_4(x) = \frac{\sqrt{5}}{12}x^3 - \frac{41\sqrt{5}}{60}x \qquad p_4(x) = \gamma\cdot r_4(x), \quad p_4(\lambda_0) = \frac{27\sqrt{5}\cdot 5 - 41\sqrt{5}\cdot 3}{60}\gamma = \frac{12\sqrt{5}}{60}\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}\gamma$

$$p_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{41}{60}x$$

Traženi skup ortogonalnih polinoma za koje vrijedi $\|p_i\|^2 = p_i(\lambda_0)$ je

$$\left\{p_1(x) = 1,\ p_2(x) = \frac{3}{5}x,\ p_3(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4},\ p_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{41}{60}x\right\}.$$

\# Posmatrajmo realni unitarni prostor $\mathcal{P}_2$, gdje za polinome

$$p = p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \quad \text{i} \quad q = q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2$$

je definisan unutrašnji proizvod na sljedeći način

$$\langle p, q\rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

Provjeriti da li su polinomi

$$u_1 = 3 + 4x + 5x^2, \quad u_2 = 9 + 12x + 5x^2, \quad u_3 = 1 - 7x + 25x^2$$

linearno nezavisni u $\mathcal{P}_2$, pa pomoću njih formirati ortonormiranu bazu za $\mathcal{P}_2$.

Rj.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} 3\alpha + 9\beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 12\beta - 7\gamma = 0 \\ 5\alpha + 5\beta + 25\gamma = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 4 & 12 & -7 \\ 5 & 5 & 25 \end{vmatrix} = -250 \neq 0$$

Vektori (polinomi) su linearno nezavisni.

Primjenimo Gram-Schmidt-ovu proceduru na ovu bazu. Prisjetimo se (jednog od načina)

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_1, u_3\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

i time ćemo dobiti ortogonalne vektore $\{v_1, v_2, v_3\}$

Pa krenimo redom

$$v_1 = u_1 = 3 + 4x + 5x^2$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} = (9+12x+5x^2) - \frac{\langle 3+4x+5x^2,\ 9+12x+5x^2 \rangle}{\|3+4x+5x^2\|^2}(3+4x+5x^2)$$

$$= (9+12x+5x^2) - \frac{100}{50}(3+4x+5x^2) = (9+12x+5x^2) + (-6-8x-10x^2) =$$

$$= 3+4x-5x^2$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 =$$

$$= (1-7x+25x^2) - \frac{\langle 3+4x+5x^2,\ 1-7x+25x^2 \rangle}{\|3+4x+5x^2\|^2}(3+4x+5x^2)$$

$$- \frac{\langle 3+4x-5x^2,\ 1-7x+25x^2 \rangle}{\|3+4x-5x^2\|^2}(3+4x-5x^2) =$$

$$= (1-7x+25x^2) - \frac{100}{50}(30+4x+5x^2) + \frac{150}{50}(3+4x-5x^2)$$

$$= (1-7x+25x^2) + (-6-8x-10x^2) + (9+12x-15x^2) = 4-3x+0x^2$$

Sad nije teško provjeriti da su tri dobijena polinoma

$$v_1 = 3+4x+5x^2, \quad v_2 = 3+4x-5x^2, \quad v_3 = 4-3x+0x^2$$

parno ortogonalni, tako da je $\{v_1, v_2, v_3\}$ ortogonalna baza za $\mathcal{P}_2$. Normalizirajući svaku od ova tri polinoma, dobitemo odgovarajuću ortonormiranu bazu

$$\left\{ \frac{3}{\sqrt{50}} + \frac{4}{\sqrt{50}}x + \frac{5}{\sqrt{50}}x^2,\ \frac{3}{\sqrt{50}} + \frac{4}{\sqrt{50}}x - \frac{5}{\sqrt{50}}x^2,\ \frac{4}{5} - \frac{3}{5}x + 0x^2 \right\}$$

(#) Zadan je linearni operator $T: Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (3a+2c-d)x^3 + (3b-c-d)x^2 + (2a+b+c-d)x + (a+2b-d)$$

Odrediti ortonormiranu bazu za $im(T)$. (Koristiti standardni unutrašnji proizvod u $\mathcal{P}_3$ definisan sa $\langle a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\ b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0 \rangle = a_3b_3+a_2b_2+a_1b_1+a_0b_0$).

Rj. Da bismo odredili ortonormiranu bazu za $im(T)$ prvo trebamo odrediti bilo kakvu bazu, a da bismo sebi olakšali posao umjesto $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{P}_3$ posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^4$ i operator T' definisan sa

$$T': \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c-d \\ 3b-c-d \\ 2a+b+c-d \\ a+2b-d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = im(A)$$

Prisjetimo se

Osnovne kolone u A generišu $im(A)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Time možemo zaključiti da je

$$im(T) = span\{3x^3+2x+1,\ 3x^2+x+2\}$$

Zanimljivo pitanje:
Kako provjeriti da je ovaj rezultat za $im(T)$ tačan?

Da bismo odredili ortonormiranu bazu primijenimo Gram-Schmidtovu proceduru.

Prisjetimo se (jednog od načina):

— polazimo od baze $\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$\vdots$$

ovim postupkom prvo bi dobili ortogonalne vektore $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$.

Pa krenimo redom

$$v_1 = 3x^3 + 2x + 1$$

$$u_2 = 3x^2 + x + 2, \qquad \langle v_1, u_2 \rangle = 0 + 0 + 2 + 2 = 4$$

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 9 + 4 + 1 = 14$$

$$v_2 = 3x^2 + x + 2 - \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{14}_{\,7}}(3x^3 + 2x + 1) = -\frac{6}{7}x^3 + 3x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{12}{7}$$

$$\frac{28}{14}$$

Ortogonalna baza za $im(T)$ je $\left\{3x^3 + 2x + 1, -\frac{6}{7}x^3 + 3x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{12}{7}\right\}$

a kako je $\|3x^3 + 2x + 1\|^2 = 14$; $\|-\frac{6}{7}x^3 + 3x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{12}{7}\|^2 = \frac{90}{7}$

to je ortonormirana baza za $im(T)$

$$\left\{\frac{3}{\sqrt{14}}x^3 + \frac{2}{\sqrt{14}}x + \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{10}}x^3 + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}x^2 + \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{10}}x + \frac{4\sqrt{7}}{7\sqrt{10}}\right\}.$$

$$\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{10}}$$

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim proizvodom ortonormirati skup

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj. Date vektore označimo redom sa u_1, u_2, u_3 i u_4. Koristićemo sljedeću proceduru: Prvo ćemo dobiti ortogonalne vektore $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ na sljedeći način

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

$$v_4 = u_4 - \frac{\langle v_1, u_4 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_4 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle v_3, u_4 \rangle}{\|v_3\|^2} v_3$$

Poslije toga nije teško ortonormirati dobijene vektore.

Pa krenimo redom

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \langle v_1, u_2 \rangle = 6, \qquad \|v_1\|^2 = 6$$

$$v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix}\langle v_1, u_3 \rangle = 0\\ \langle v_2, u_3 \rangle = 0\\ \|v_2\|^2 = 2\end{matrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle v_1, u_4 \rangle = 1 \quad \langle v_3, u_4 \rangle = 1$$

$$\langle v_2, u_4 \rangle = -1 \quad \|v_1\|^2 = 6, \ \|v_2\|^2 = 2$$

$$\|v_3\|^2 = 4$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Time smo dobili ortogonalan skup

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1/12 \\ -1/12 \\ -1/4 \\ 1/12 \end{pmatrix} \right\}$$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}^4$ je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1/12 \\ -1/12 \\ -1/4 \\ 1/12 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dat je vektorski podprostor $\mathcal{M}$ prostora $\mathbb{R}^4$ definisan sa

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, z_1 + 2z_2 + z_3 = 0, \ 2z_1 + z_2 - z_3 = 0, \ z_1 + 5z_2 + 4z_3 = 0 \right\}.$$

Odrediti mu jedan (direktni) komplement (koji nije ortogonalni komplement).

R: Primjetimo da

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} z_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \ker\Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \Big)$$

Prema tome $\mathcal{M} = \ker(A)$ gdje je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Prisjetimo se

Komplementarni podprostori

~~Za~~ Podprostore $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod je $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$ i u tom slučaju kažemo da je $\mathcal{V}$ direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, i ovo označavamo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

$\mathcal{X} + \mathcal{Y} := \{ x + y \mid x \in \mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y} \}$.

Ako X i Y imaju redom baze $\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$ vrijedi sljedeće

$$V = X \oplus Y \iff \forall v \in V \ \exists! x \in X, y \in Y \quad v = x + y \iff \mathcal{B}_X \cap \mathcal{B}_Y = \emptyset \text{ i } \mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y \text{ je baza za } V$$

Odredimo prvo bazu za M tj. bazu za $\ker(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v + I_v(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{III_v + II_v}{\overset{II_v : (-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_v + II_v \cdot (-2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A$$

$$Ax = 0 \iff E_A x = 0 \quad \text{gdje je } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

$x_3 = s \quad x_4 = t$

$$x = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$M = \ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Baza za M je $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Da bi odredili komplement od M nadopunimo skup $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{IV_v + III_v}{\overset{I_v + III_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{III_v \cdot (-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ovo je matrica u reduciranom red ešelon obliku

(Direktni) komplement od M je

$$N = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(#) U prostoru $\mathbb{R}^5$ zadan je podprostor $\mathcal{M}$ razapet (generisan) vektorima $(0,0,1,0,0)^T$ i $(0,1,0,1,0)^T$ i podprostor

$$\mathcal{L} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T \in \mathbb{R}^5 \mid x_1-x_2+x_3=0,\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=0\}$$

(a) Odrediti bazu i dimenziju vektorskih prostora $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$.
(b) Odrediti dimenziju vektorskog prostora $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$,
(c) Odrediti neku bazu za (direktni) kompliment prostora $\mathcal{L}$ (koji nije ortogonalni komplement).

Rj.
Red vektor $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$ ćemo u rješenju pisati kao kolona vektor $\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$. Prema postavci zadatka imamo

$$\mathcal{M} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Dalje

$$\mathcal{L} = \left\{\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0\\2&-2&1&1&0\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ker A$$

Generator skup za $\ker A$ su vektori iz opšteg rješenja sistema $Ax=0$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0\\2&-2&1&1&0\end{pmatrix} \overset{II_v + I_v\cdot(-2)}{\sim} \begin{pmatrix}1&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}\,A = 2 = \text{rang}\,\bar{A}$$

Sistem Ax ima ∞ mnogo rješenja i 3 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_2=s$, $x_4=t$, $x_5=u$

$x_1 = \cancel{x_2} - x_3 \Rightarrow x_1 = s-t$

$-x_3 = -x_4 \Rightarrow x_3 = t$

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t\\s\\t\\t\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}s + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

Time je $\mathcal{L} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Prema tome $\dim \mathcal{M} = 2$, $\dim \mathcal{L} = 3$ a baze za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{L}$ su redom

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \text{i} \quad \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

b) Prisjetimo se:

Dimenzija sume

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora V, tada

$$\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim(\mathcal{X}) + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$$

gdje je $\mathcal{X}+\mathcal{Y} = \{x+y \mid x\in\mathcal{X} \text{ i } y \in \mathcal{Y}\}$.

Ako sa $\mathcal{B}_\mathcal{M}$ označimo bazu za $\mathcal{M}$ a sa $\mathcal{B}_\mathcal{L}$ označimo bazu za $\mathcal{L}$, vidimo da $\mathcal{B}_\mathcal{M} \cup \mathcal{B}_\mathcal{L}$ generiše $\mathcal{M}+\mathcal{L}$.
Dimenziju za $\mathcal{M}+\mathcal{L}$ nije teško odrediti, posmatramo broj linearno nezavisnih kolona iz $\mathcal{B}_\mathcal{M} \cup \mathcal{B}_\mathcal{L}$:

$$D = \begin{pmatrix}0&0&1&-1&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \overset{I_k \leftrightarrow III_k}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \overset{II_v + I_v\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \overset{IV_v + II_v\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\text{rang}\,D = 4 \Rightarrow \dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = 4$

$$\dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \underset{2}{\dim \mathcal{X}} + \underset{3}{\dim \mathcal{Y}} - \dim(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$$

$$\dim(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) = 1$$

U zadatku se ne traži da odredimo bazu za $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$. Međutim, ako bi željeli da odredimo ovu bazu prvo primjetimo da je

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

i kako je $\dim(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})=1$ to je $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

c) Prisjetimo se

Komplementarni podprostori

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni kadgod je

$$\mathcal{V}=\mathcal{X}+\mathcal{Y} \quad i \quad \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=0.$$

i u ovom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, i ovo označavamo sa $\mathcal{V}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$.

Ako su $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ baze za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ tada

$\mathcal{V}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ akko $\forall v\in\mathcal{V}\ \exists!\, x\in\mathcal{X}, y\in\mathcal{Y}$ t.d. $v=x+y$ akko $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cap\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}=\emptyset$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cup\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ je baza za $\mathcal{V}$

Ako sa B označimo matricu

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\-1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

tada je $$\operatorname{im}(B^T)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathcal{L}$$

pa produžimo bazu od $\mathcal{L}$ do baze prostora $\mathbb{R}^5$.

Znamo da je, za proizvoljne matrice A i B

$$\operatorname{im}(A^T)=\operatorname{im}(B^T) \text{ akko } A \overset{red}{\sim} B$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\-1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[IV_v+I_v\cdot(-1)]{II_v+I_v}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[V_v+II_v\cdot(-1)]{IV_v+II_v}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&\boxed{1}&0&0\\0&0&0&\boxed{1}&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Baza za direktni komplement prostora $\mathcal{L}$ je

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(#) Neka je $Q: \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ($\mathcal{P}_3$ označava prostor polinoma $\underbrace{\ }_{\text{stepena}}$ ≤ 3) linearni operator zadan sa

$Q(p)$ = polinom stepena 2 čiji graf prolazi tačkama $(-1; p(-1))$, $(0; p(0))$ i $(1; p(1))$.

(a) Odrediti matricu operatora Q (matricu koordinata) u odnosu na standardnu bazu.

(b) Odrediti (direktni) komplement prostora $\ker(Q)$ (koji nije ortogonalni komplement).

Rj.

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p(-1) = -a + b - c + d$

$p(0) = d$

$p(1) = a + b + c + d$ Prvo odredimo djelovanje operatora Q.

Trebamo odrediti koeficijente polinoma $g(x)$ stepena 2 čiji graf prolazi tačkama $(-1; -a+b-c+d)$, $(0; -a+b-c+d)$ i $(1; a+b+c+d)$.

Označimo sa $r_2x^2 + r_1x + r_0$ polinom $g(x)$ tj. $g(x) = r_2x^2 + r_1x + r_0$.

Tada je

$g(-1) = r_2 - r_1 + r_0$

$g(0) = r_0$ $\Rightarrow$ $r_0 = d$

$g(1) = r_2 + r_1 + r_0$

$g(-1) = r_2 - r_1 + d =$
$= -a + b - c + d$

$g(1) = r_2 + r_1 + d =$
$= a + b + c + d$

Sad imamo

$r_2 - r_1 = -a + b - c$ (1)

$r_2 + r_1 = a + b + c$ (2)

(1)+(2): $2r_2 = 2b \Rightarrow r_2 = b$ $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $r_1 = a + c$ Time smo dobili

$$Q(ax^3 + bx^2 + cx + d) = bx^2 + (a+c)x + d$$

(a)

Da bismo olakšali rješenje zadatka umjesto prostora $\mathcal{P}_3$ posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^4$ i linearni operator $Q': \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definisan na sljedeći način

$$Q'\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a+c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Time smo dobili da je za bazu $\mathcal{G} = \{x^3, x^2, x, 1\}$

$$[Q]_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\ker(Q') = \{x \mid Q'x = 0\}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{I_r \leftrightarrow I_r}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 + x_3 = 0$
$x_2 = 0$
$x_4 = 0$

$\Rightarrow$ 1 promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_3 = s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \ s \in \mathbb{R} \quad \left(= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \ s \in \mathbb{R} \right)$$

$$\ker(Q) = \{ax^3 - ax \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Označimo sa $M = \ker(Q)$. Trebamo odrediti N tako da

$M \oplus N = \mathcal{P}_3$ $\Leftrightarrow$ $M \cap N = \{0\}$
$M + N = \mathcal{P}_3$

Prisjetimo se

Ako su $\mathcal{B}_X$ i $\mathcal{B}_Y$ baze za X i Y potprostora V tada

$V = X \oplus Y \Leftrightarrow \forall v \in V \ \exists!\, x \in X, y \in Y$ t.d. $v = x + y$ $\Leftrightarrow \mathcal{B}_X \cap \mathcal{B}_Y = \emptyset$ i $\mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y$ je baza za V

Znamo da osnovne kolone u A generiraju $im(A)$.

$$ker(Q') = im\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbb{R}^4 = im\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pa ako je $M' = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ tada je $N' = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

iz čega slijedi da je (direktni) komplement za $ker(Q)$ $(= M)$

$$N = \{ ax^3 + bx^2 + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

Neka je

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1+x_2+x_3+x_4=0,\ x_1-x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_1+x_2+x_3-x_4=0 \right\}$$

Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$, odrediti mu bazu, dimenziju i neki direktni komplement.

Rj: Da bi $\mathcal{L}$ bio vektorski potprostor od $\mathbb{R}^4$ potrebno je i dovoljno da je $\mathcal{L}$ neprazan i da vrijede svojstva (A1) i (M1)

(A1) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$

(M1) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Pa izaberimo dva proizvoljna vektora iz $\mathcal{L}$ npr. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$

Za ova dva vektora znamo da vrijedi

$$\begin{matrix} -a_1+a_2+a_3+a_4=0 \\ a_1-a_2+a_3+a_4=0 \\ a_1+a_2-a_3+a_4=0 \\ a_1+a_2+a_3-a_4=0 \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} -b_1+b_2+b_3+b_4=0 \\ b_1-b_2+b_3+b_4=0 \\ b_1+b_2-b_3+b_4=0 \\ b_1+b_2+b_3-b_4=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+(a_4+b_4)=0 \\ (a_1+b_1)-(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+(a_4+b_4)=0 \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2)-(a_3+b_3)+(a_4+b_4)=0 \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)-(a_4+b_4)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$$

Slično se pokaže da je $\alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L}$ jest vektorski potprostor

Primjetimo da prostor $\mathcal{L}$ možemo napisati u sljedećem obliku

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \ker(A)$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{L}$ je vektorski prostor koji se sastoji samo od nula vektora. Dimenzija od $\mathcal{L}$ je nula i $\mathcal{L}$ nema baze.

Prisjetimo se definicije komplementarnog potprostora

Za potprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni potprostori akko $\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ i $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ što zapisujemo sa $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Direktni komplement od $\mathcal{L}$ je

$$\mathcal{M} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Odrediti URV faktorizaciju matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Rj.

Prisjetimo se

URV faktorizacija

Za svaku matricu $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ ranga r, postoje ortogonalne matrice $U_{m \times m}$ i $V_{n \times n}$ i nesingularna matrica $C_{r \times r}$ takve da

$$A = URV^T = U \begin{pmatrix} C_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} V^T$$

- Prvih r kolona u U je ortonormirana baza za $im(A)$.
- Zadnjih $m-r$ kolona od U je ortonormirana baza za $ker(A^T)$.
- Prvih r kolona od V je ortonorm. baza za $im(A^T)$
- Zadnjih $n-r$ kolona od V je orton. baz za $ker(A)$

Pa prvo odredimo baze za četri fundamentalna podprostora.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{III_v + I_v \cdot (-2)}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{I_v + III_v \cdot 3}{\overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{II_v \cdot (-1)}{\sim} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_A}$$

$$im(A) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \quad im(A^T) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Ax=0 \iff E_A x = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = -2x_2 \qquad x = \begin{pmatrix}-2s\\ s\\ 0\end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R}$$

$$\ker(A) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{III_v + I_v\cdot(-2)}{\overset{II_v + I_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{III_v\cdot(-1)}{\overset{I_v + III_v\cdot(3)}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{E_A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} -5 & 0 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}}_{P}\right]$$

$$\ker(A^T) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Sad uz pomoć Gram-Schmidtovog procesa ortonormirajmo date baze. Prisjetimo se

Klasični Gram-Schmidtov algoritam

Za $k=1$: $u_1 \leftarrow \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Za $k>1$: $u_k \leftarrow x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i, x_k\rangle u_i$

$$u_k \leftarrow \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

Posmatrajmo bazu za $\operatorname{im}(A)$: $\left\{\overset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}}\right\}$

$$\|x_1\| = \sqrt{x_1^T x_1} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$u_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad u_2 \leftarrow x_2 - \langle u_1, x_2\rangle u_1$$

$$\langle u_1, x_2\rangle = u_1^T x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\ \ -1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3+3+10) = \frac{16}{\sqrt{6}}$$

$$\langle u_1, x_2\rangle u_1 = \frac{16}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{8}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix} - \frac{8}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9-8\\-9+8\\15-16\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\frac{1}{9}(1+1+1)} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_2 \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ortonormirana baza za $\operatorname{im}(A)$ je $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\-\sqrt{3}/3\\-\sqrt{3}/3\end{pmatrix}\right\}$

Posmatrajmo sad bazu za $\operatorname{im}(A^T)$: $\left\{\overset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$.

$$\|x_1\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$u_1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad \langle u_1, x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\ 2\ 0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$u_2 \leftarrow x_2 - \langle u_1, x_2\rangle u_1 \qquad u_2 \leftarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = 1$$

$$u_2 \leftarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ortonormirana baza za $\operatorname{im}(A^T)$ je $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Ortonormirane baze za $\ker(A)$ i $\ker(A^T)$ su redom

$$\left\{\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\\ 0\end{pmatrix}\right\} \quad ; \quad \left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Time smo odredili matrice U i V

$$U=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{6} & -\sqrt{3}/3 & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & -\sqrt{3}/3 & 0\end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$A=URV^T$ $/\cdot U^T$ sa lijeve strane

$U^TA=RV^T$ $/\cdot V$ sa desne strane

$R=U^TAV$

$$R=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/3\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5/\sqrt{5} & 3 & 0\\ -5/\sqrt{5} & -3 & 0\\ 10/\sqrt{5} & 5 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30/\sqrt{30} & 16/\sqrt{6} & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

\# Baza vektorskog prostora $\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1+x_2=0,\ -x_1+2x_2+x_3=0\right\}$ je $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$. Odrediti mu jedan ortogonalni komplement (u odnosu na standardni unutrašnji (skalarni) proizvod $\langle x,y\rangle=x^Ty$).

Rj.

Prisjetimo se

Ortogonalni komplement

Za podskup $\mathcal{M}$ unitarnog prostora $\mathcal{V}$, ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ od $\mathcal{M}$ je definisan sa

$$\mathcal{M}^\perp=\{x\in\mathcal{V} \mid \langle m,x\rangle=0 \text{ za } \forall m\in\mathcal{M}\}$$

Primjetimo da je $\mathcal{L}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}=\text{im}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}}_{=A}=\text{im}(A)$.

Teorema ortogonalne dekompozicije

Za svaku matrica $A\in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\text{im}(A)^\perp=\ker(A^T) \quad ; \quad \ker(A)^\perp=\text{im}(A^T)$$

Ortogonalni komplement prostora $\mathcal{L}$ će biti $\ker(\underbrace{[1\ -1\ 3]}_{=A^T})$.

$$x-y+3z=0$$

$$\begin{matrix}z=s\\ y=t\end{matrix} \Rightarrow x=t-3s \Rightarrow \begin{pmatrix}t-3s\\t\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}s$$

Ortogonalni komplement za $\mathcal{L}$ je $\mathcal{L}^\perp=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(#) U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(x)=ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ polinoma stepena manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ dat je podprostor

$$M = \text{span}\{x^2-1,\ x+1\}$$

Odredite jednu bazu za $M^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(x)=2x^2+x+5$ u obliku sume $p=p_1+p_2$, pri čemu je $p_1\in M$, $p_2\in M^\perp$.

Rj. Prisjetimo se

Ortogonalni komplement
Za podskup M unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $M^\perp$ od M je definisan sa

$$M^\perp = \{x\in V \mid \langle m,x\rangle=0 \text{ za } \forall m\in M\}$$

Primjetimo da je $\dim(\mathcal{P}_2)=3$. Kako je $\dim(M)=2$ i $\mathcal{P}_2 = M \oplus M^\perp$ to je $\dim(M^\perp)=1$.
Da bi odredili $M^\perp$ dovoljno je pronaći polinom $p(x)=ax^2+bx+c$ takav da $\langle p,q\rangle=0$ $\forall q\in M$.
Zbog $\dim(M^\perp)=1$ dobijeni polinom će biti baza za $M^\perp$.
Da bi odredili polinom $p(x)=ax^2+bx+c$ za koji vrijedi $\langle p,q\rangle=0$ $\forall q\in M$ najjednostavnije je posmatrati bazu za M tj. skup $\{x^2-1,\ x+1\}$.

$$\langle ax^2+bx+c,\ x^2-1\rangle = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)(x^2-1)\,dx = \int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+\underline{cx^2-ax^2}-bx-c)\,dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+(c-a)x^2-bx-c)\,dx=0$$

$$\frac{a}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\frac{b}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + (c-a)\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} - \underbrace{\frac{b}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - cx\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$\frac{2}{5}a + \frac{2}{3}(c-a) - 2c = 0$$

$$\frac{2}{5}a - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c - 2c = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{6-10}{15}a + \frac{2-6}{3}c = 0$$

$$-\frac{4}{15}a - \frac{4}{3}c = 0 \quad \dots(*)$$

$$\langle ax^2+bx+c,\ x+1\rangle = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)(x+1)\,dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^3+\underline{bx^2}+\underline{\underline{cx}}+\underline{ax^2}+\underline{\underline{bx}}+c)\,dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c)\,dx=0$$

$$\underbrace{\frac{a}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + \frac{b+a}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} + \underbrace{\frac{c+b}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0} + cx\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + 2c = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + 2c = 0 \quad \dots(**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ vidimo da imamo sistem od dvije jednačine su tri nepoznate. Jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno npr.

$a=15t,\ t\in\mathbb{R}$

$(*) \Rightarrow -\frac{4}{15}\cdot 15t - \frac{4}{3}c = 0$

$-4t - \frac{4}{3}c = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}c = -4t \Rightarrow c=-3t,\ t\in\mathbb{R}$

$(**) \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot 15t + \frac{2}{3}b + 2\cdot(-3)t = 0$

$10t + \frac{2}{3}b - 6t = 0$

$\frac{2}{3}b = -4t \ /\cdot 3 \Rightarrow 2b=-12t \Rightarrow b=-6t$

Sad ax^2+bx+c postaje (za $t=1$) $15x^2-6x-3 \ /:15$

$x^2 - \frac{6}{15}x - \frac{3}{15}$

Odavde vidimo da je $M^\perp = \text{span}\{x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\}$

baza za $M^\perp$

Ostalo je još da pronađemo skalare α, β i γ tako da

$2x^2+x+5 = \alpha(x^2-1) + \beta(x+1) + \gamma(x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5})$

$\alpha + \gamma = 2 \quad \ldots(1)$

$\beta - \frac{2}{5}\gamma = 1 \quad \ldots(2)$

$-\alpha + \beta - \frac{1}{5}\gamma = 5 \quad \ldots(3)$

$(1)+(3):\ \beta + \frac{4}{5}\gamma = 7 \quad (I)$

$(2):\ \beta - \frac{2}{5}\gamma = 1 \quad (II)$

$(I)-(II):\ \frac{6}{5}\gamma = 6 \ /\cdot 5$

$6\gamma = 30 \Rightarrow \gamma = 5$

$\gamma = 5 \Rightarrow \beta = 7-4$

$\beta = 3 \Rightarrow \alpha = -3$

Prema tome

$$2x^2+x+5 = \underbrace{(-3)(x^2-1)+3(x+1)}_{\in M} + \underbrace{5(x^2-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5})}_{\in M^\perp}$$

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa skalarnim proizvodom

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$$

zadan je podprostor V razapet vektorima $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ i $v_2=(1,0,1,1)^T$. Prikažite vektor $x=(4,2,2,4)^T$ u obliku $x=v+w$, gdje je $v\in V$, $w\in V^\perp$.

Rj.

Prisjetimo se

Ortogonalni komplement

Za podskup M unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $M^\perp$ od M je definisan sa

$$M^\perp = \{x\in V \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m\in M\}.$$

U našem slučaju primjetimo da je

$$V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Kako je $\dim\mathbb{R}^4 = 4$, $\dim V = 2$ i $\mathbb{R}^4 = V\oplus V^\perp$ to je $\dim V^\perp = 2$. Odredimo vektore $v_3=(a,b,c,d)$ i $v_4=(e,f,g,h)$ takve da

$\langle v_1, v_3\rangle = 0 \Rightarrow a+c=0$

$\langle v_2, v_3\rangle = 0 \Rightarrow a+c+2d=0$

$\langle v_1, v_4\rangle = 0 \Rightarrow e+g=0$

$\langle v_2, v_4\rangle = 0 \Rightarrow e+g+2h=0$

$a+c=0$

$a+c+2d=0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \overset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} a=-c \\ d=0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{rang}(A)=\text{rang}(\bar{A})=2\\ \text{broj nepoznatih}=4\end{array}\right\} \Rightarrow \text{dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. } b=t,\ c=s$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s\\t\\s\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}t$$

Primjetimo da smo u procesu određivanja vektora v_3 u stvari odredili i vektor v_4. Time smo dobili

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Lagana provjera nam pokazuje da je $v_1\perp v_3$, $v_1\perp v_4$, $v_2\perp v_3$, $v_2\perp v_4$.

Da li je skup $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ linearno nezavisan?

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\underset{III_v-I_v}{\overset{II_v\leftrightarrow IV_v}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{skup } \{v_1,v_2,v_3,v_4\} \text{ jest linearno nezavisan.}$$

Ostalo je još da razložimo vektor x preko vektora v_1,v_2,v_3,v_4. Odredimo α, β, γ i δ t.d.

$$\begin{pmatrix}4\\2\\2\\4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}\alpha+\beta-\gamma=4\\ \alpha+\beta+\gamma=2\\ \delta=2,\quad \beta=4\end{array}\ \begin{array}{l}2\alpha+2\beta=6\\2\alpha+8=6\\ \alpha=-1\end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha=-1,\ \beta=4;\ \gamma=-1,\ \delta=2$$

Možemo zaključiti da je

$$\underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\\2\\4\end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\3\\4\end{pmatrix}}_{v}+\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}}_{w}\quad \text{gdje su } v=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\4\end{pmatrix}\in\mathcal{V} \text{ i } w=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{V}^{\perp}$$

\# Neka je $\mathcal{M}$ podprostor unitarnog prostora $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ generisan matricama $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}$. Odredite jednu bazu za ortogonalni kompliment od $\mathcal{M}$, te prikažite matricu $X=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ u obliku $X=Y_1+Y_2$, gdje je $Y_1\in\mathcal{M}$, a $Y_2\in\mathcal{M}^{\perp}$. (Standardni skalarni proizvod u $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ je $\langle A,B\rangle=\text{trag}(AB^T)$).

R:

Prisjetimo se definicije ortogonalnog komplementa od $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}^{\perp}=\{x\in\mathcal{V}\mid \langle m,x\rangle=0 \text{ za } \forall m\in\mathcal{M}\}$$

U našem slučaju

$$\mathcal{M}=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}.\quad \text{Neka je } M=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \text{ i } N=\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

Odredimo matricu $C=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ t.d. $\langle M,C\rangle=0$ i $\langle N,C\rangle=0$

$$\left.\begin{array}{l}\langle M,C\rangle=\text{trag}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\right)=\text{trag}\left(\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\right)=a+d \quad i\\ \langle N,C\rangle=\text{trag}\left(\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\right)=\text{trag}\left(\begin{bmatrix}2a+b&2c+d\\0&0\end{bmatrix}\right)=2a+b\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}a+d=0\\2a+b=0\end{array}\Rightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\2&1&0&0&0\end{array}\right]\end{array}\overset{II_v-I_v\cdot2}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&0&-2&0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{l}a=-d\\b=2d\end{array}$$

$\text{rang}A=\text{rang}\bar{A}=2<4 \Rightarrow$ 2 promjenjive uzimamo proizvoljno $d=t$, $c=s$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t&2t\\s&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}t$$

Prema tome $\mathcal{M}^\perp = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

Baza za ortogonalni komplement je $\left\{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

Ostalo je još da odredimo α, β, γ i δ t.d.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta \quad - \delta &= 1\\ \beta \quad + 2\delta &= 0\\ \gamma \quad &= 0\\ \alpha \quad + \delta &= 0\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-1&1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1/6\\0&1&0&0&1/3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1/6\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}}_{\in\mathcal{M}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}}_{\in\mathcal{M}^\perp}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{5}{6}$$

(#) U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3+bt^2+ct+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena ≤ 3 sa skalarnim proizvodom

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$$

dat je potprostor $\mathcal{M} = \text{span}\{1+t, 1\}$. Odrediti jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$.

Rj. Prema definiciji

$$\underline{\mathcal{M}^\perp = \{q \in \mathcal{P}_3 \mid \langle p, q\rangle = 0,\ p \in \mathcal{M}\}}$$

Neka je $q(t) = at^3+bt+ct+d$, pa odredimo koeficijente a, b, c i d t.d. $\langle p_1, q\rangle = 0$ i $\langle p_2, q\rangle = 0$ gdje su $p_1(t) = 1+t$, $p_2(t) = 1$.

$$\langle 1+t, at^3+bt^2+ct+d\rangle = \int_{-1}^{1}(1+t)(at^3+bt^2+ct+d)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1}(at^3+bt^2+ct+d+at^4+bt^3+ct^2+dt)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1}(at^4+(a+b)t^3+(b+c)t^2+(c+d)t+d)\,dt = \dots = \frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c+2d$$

$$\langle 1, at^3+bt^2+ct+d\rangle = \int_{-1}^{1}(at^3+bt^2+ct+d)\,dt = \dots = \frac{2}{3}b+2d$$

Time smo dobili sistem

$$\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c+2d = 0$$

$$\frac{2}{3}b+2d = 0$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rang} \bar{A} = \operatorname{rang} A = 2 < 4$ $\Rightarrow$ dvije promjenjive uzimamo proizvoljno

npr. $x_3 = s \quad x_4 = t$ tj.

$c = s, \quad d = t$

$\Rightarrow \quad a = -\frac{5}{3}s, \quad b = -3t$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}s \\ -3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$\mathcal{M}^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ -\frac{5}{3}t^3 + t,\ -3t^2 + 1 \right\}$$

(baza za $\mathcal{M}^{\perp}$ je $\left\{ \left(-\frac{5}{3}\right)t^3 + t,\ -3t^2 + 1 \right\}$)

U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_4$ realnih polinoma stepena ≤ 4 dat je skup

$$\mathcal{M} = \{ p \in \mathcal{P}_4 \mid p'(0) = p(1),\ p''(0) = 2p(-1) \}.$$

Dokažite da je $\mathcal{M}$ vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$, odredite mu jednu bazu i dimenziju, te jedan direktni komplement.

Rj.

Prisjetimo se definicije vektorskog potprostora i potrebnog i dovoljnog uslova da bi neki skup bio vektorski potprostor:

Za neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$ kažemo da je vektorski potprostor od $\mathcal{V}$ nad $\mathbb{F}$ akko je $\mathcal{S}$ također vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ u odnosu na iste operacije vektorskog sabiranja i skalarnog množenja. Da bi neprazan skup $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$) bio vektorski potprostor prostora $\mathcal{V}$ potrebno je i dovoljno da vrijedi (A1) i (M1):

(A1) $\quad x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$

(M1) $\quad x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

Pa pokažimo da vrijedi (A1). Izaberimo proizvoljna dva polinoma $p, q \in \mathcal{M}$ i pokažimo da za njih vrijedi $p + q \in \mathcal{M}$

$$\left.\begin{array}{l} (p+q)'(0) = (p'+q')(0) = p'(0) + q'(0) \overset{p,q\in\mathcal{M}}{=} p(1) + q(1) = (p+q)(1) \\ (p+q)''(0) = (p''+q'')(0) = p''(0) + q''(0) \overset{p,q\in\mathcal{M}}{=} 2p(-1) + 2q(-1) = 2(p+q)(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{vrijedi (A1)}$$

Pokažimo da vrijedi (M1) - izaberimo proizvoljni polinom $p \in \mathcal{M}$ i pokažimo da je $\alpha p \in \mathcal{M}$ za $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha p)'(0) = \alpha p'(0) \overset{p\in\mathcal{M}}{=} \alpha p(1) = (\alpha p)(1) \\ (\alpha p)''(0) = \alpha p''(0) \overset{p\in\mathcal{M}}{=} \alpha 2p(-1) = 2(\alpha p)(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{vrijedi (M1)}$$

$\mathcal{M}$ jest vektorski potprostor prostora $\mathcal{P}_4$.

Sljedeće što želimo je da skup $\mathcal{M}$ prikažemo na drugačiji način.

$p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $\underline{p(1)=a+b+c+d+e}$, $p(-1)=a-b+c-d+e$

$p'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d$, $\underline{p'(0)=d}$ $\underline{\underline{2p(-1)=2a-2b+2c-2d+2e}}$

$p''(x) = 12ax^2+6bx+2c$, $\underline{\underline{p''(0)=2c}}$

Ako je $p\in\mathcal{M}$ tada $p'(0)=p(1)$ i $p''(0)=2p(-1)$ tj.

$$a+b+c+e=0$$
$$a-b-d+e=0$$

Prema tome imamo

$$\mathcal{M} = \left\{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \;\middle|\; \begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&-1&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&0&1&0\\1&-1&0&-1&1&0\end{array}\right] \sim \dots \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}a&b&c&d&e&\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&\frac{1}{2}&-1/2&1&0\\0&1&\frac{1}{2}&1/2&0&0\end{array}\right]\end{array}$$ 5 nepoznatih, rang 2

tri promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c=t$, $d=s$, $e=u$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s-u\\-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}s\\t\\s\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}s + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u, \quad s,t,u\in\mathbb{R}$$

Baza

Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor $\mathcal{V}$ nazivamo baza prostora $\mathcal{V}$.

Time smo dobili

$$\mathcal{M} = \left\{\left(-\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}s-u\right)x^4+\left(-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}s\right)x^3+tx^2+sx+u \;\middle|\; t,s,u\in\mathbb{R}\right\}$$
$$= \operatorname{span}\left\{-\tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{1}{2}x^3+x^2,\ \tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{1}{2}x^3+x,\ -x^4+1\right\}$$

Prema tome baza vektorskog prostora $\mathcal{M}$ je

$$\left\{-\tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{1}{2}x^3+x^2,\ \tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{1}{2}x^3+x,\ -x^4+1\right\}$$

Dimenzija

Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je definisana sa

$\dim\mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi od $\mathcal{V}$
= broj vektora u najmanjem skupu koji generiše $\mathcal{V}$
= broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu iz $\mathcal{V}$

Dimenzija prostora $\mathcal{M}$ je 3.

Primjetimo da je i

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{-x^4-x^3+2x^2,\ x^4-x^3+2x,\ -x^4+1\}$$

Direktni komplement

Za podprostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ prostora $\mathcal{V}$ kažemo da su komplementarni potprostori akko je $\mathcal{V}=\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ i $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}=\mathbf{0}$, i u tom slučaju za $\mathcal{V}$ kažemo da je direktna suma od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, što označavamo sa $\mathcal{V}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$.

Pa proširimo bazu od $\mathcal{M}$ do baze za $\mathcal{P}_4$

$$\begin{bmatrix}-1&1&-1&1&0&0&0&0\\-1&-1&0&0&1&0&0&0\\2&0&0&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1/2&0&0\\0&1&0&0&0&0&1/2&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1/2&-1/2&1\\0&0&0&0&1&1/2&1/2&0\end{bmatrix}$$

Direktni komplement od $\mathcal{M}$ je

$$\mathcal{N} = \operatorname{span}\{x^4, x^3\}$$

(#) Neka je $\mathcal{P}_2$ vektorski prostor svih realnih polinoma stepena ≤ 2

$$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

(a) Provjeriti da li je sa

$$\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$$

definiran unutrašnji (skalarni) proizvod na $\mathcal{P}_2$.

b) Za podprostor $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}_2$ generisan polinomima $p_1(x) = 1$ i $p_2(x) = x$ odredite ortogonalni komplement.

c) Odrediti ortogonalnu projekciju od $p(x) = -2x^2 + x + 2$ na $\mathcal{L}$.

R.:

(a) Prisjetimo se

Unutrašnji proizvod na realnom (ili kompleksnom) vektorskom prostoru V je f-ja koja preslikava svaki uređen par vektora x, y u realni (ili kompleksan) skalar $\langle x, y \rangle$ tako da vrijede sljedeće četiri osobine

- $\langle x, x \rangle$ je realan sa $\langle x, x \rangle \geq 0$, i $\langle x, x \rangle = 0$ akko $x = 0$,
- $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ za svaki skalar α
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (za realni prostor, ovo postaje $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$)

Realan ili kompleksan vektorski prostor koji je opremljen sa unutrašnjim proizvodom zovemo unitarni prostor

(i) pokažimo da je $\langle p, p \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle p, p \rangle \geq 0$ i $\langle p, p \rangle = 0$ akko $p = 0$

$$\langle p, p \rangle = p(1)p(1) + 2p(0)p(0) + p(-1)p(-1) =$$

$$= \underbrace{(a+b+c)^2}_{\in \mathbb{R}} + 2\underbrace{c^2}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(a-b+c)^2}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

$\langle p, p \rangle = 0$ akko $(a+b+c)^2 + 2c^2 + (a-b+c)^2 = 0$ akko

$$\begin{matrix} (a+b+c)^2 = 0 \\ 2c^2 = 0 \\ (a-b+c)^2 = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} a+b+c = 0 \\ c = 0 \\ a-b+c = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} a+b = 0 \\ a-b = 0 \end{matrix}$$

$$\iff a = 0, b = 0, c = 0 \iff p = 0$$

vrijedi prva osobina

(ii)

$$\langle p, \alpha q \rangle = p(1)\alpha q(1) + 2p(0)\alpha q(0) + p(-1)\alpha q(-1) =$$

$$= \alpha\left(p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)\right) = \alpha \langle p, q \rangle \quad \forall \alpha$$

vrijedi druga osobina

(iii)

$$\langle p, q + r \rangle = \underbrace{p(1)[q(1) + r(1)]}_{\in \mathbb{R}} + 2\underbrace{p(0)[q(0) + r(0)]}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{p(-1)[q(-1) + r(-1)]}_{\in \mathbb{R}}$$

$$= p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1) + p(1)r(1) + 2p(0)r(0) + p(-1)r(-1)$$

$$= \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle$$ vrijedi treća osobina

(iv)

$$\langle p, q \rangle = \underbrace{p(1)q(1)}_{\in \mathbb{R}} + 2\underbrace{p(0)q(0)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{p(-1)q(-1)}_{\in \mathbb{R}} = q(1)p(1) + 2q(0)p(0) + q(-1)p(-1)$$

$$= \langle q, p \rangle$$

vrijedi četvrta osobina

Dati proizvod jest unutrašnji proizvod na $\mathcal{P}_2$.

b) Prisjetimo se

Ortogonalni komplement

Za podskup M unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $M^\perp$ od M je definisan kao skup svih vektora u V koji su ortogonalni na svaki vektor u M. Tj.

$$M^\perp = \{x \in V \mid \langle m, x \rangle = 0 \quad \forall m \in M\}$$

$$\mathcal{L} = \operatorname{span}\{p_1(x), p_2(x)\} = \{\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\alpha_1 + \alpha_2 x \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{L}^\perp = \{ax^2+bx+c \mid$ gdje su a, b i c realni brojevi koje trebamo odrediti$\}$

Pa izaberimo proizvoljne $p \in \mathcal{L}$ i $q \in \mathcal{L}^\perp$

$$\langle p, q \rangle = 0$$

$$(\alpha_1+\alpha_2)(a+b+c) + 2\alpha_1 c + (\alpha_1-\alpha_2)(a-b+c) = 0$$

$$2\alpha_1 a + 2\alpha_2 b + 4\alpha_1 c = 0 \quad /:2$$

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + 2\alpha_1 c = 0$$

Trebamo odrediti a, b i c tako da ova jednakost vrijedi za $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Za $a=2$, $b=0$, $c=-1$ $\quad \alpha_1 a + \alpha_2 b + 2\alpha_1 c = 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$

Kako je $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$ i $\dim(\mathcal{L}) = 2$ to je $\dim(\mathcal{L}^\perp) = 1$.

Primjetimo da ako za izaberemo proizvoljan realan broj β moramo imati $a = -2\beta$, $b=0$ da bi jednakost

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + 2\alpha_1 c = 0$$

vrijedila za sve realne $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Prema tome

$$\mathcal{L}^\perp = \{-2\beta x^2 + \beta \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{(-2x^2+1)\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$= \operatorname{span}\{-2x^2+1\}.$$

Ako sa $p_3(x)$ označimo polinom $p_3(x) = -2x^2+1$, primjetimo da

$$\langle p_1(x), p_3(x) \rangle = \langle 1, -2x^2+1 \rangle = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$$

$$\langle p_2(x), p_3(x) \rangle = \langle x, -2x^2+1 \rangle = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 0$$

Ortogonalni komplement prostora $\mathcal{L}$ je $\mathcal{L}^\perp = \operatorname{span}\{-2x^2+1\}$.

c) Prisjetimo se

Ortogonalna projekcija

Za $v \in V$ neka je $v = m + n$, gdje je $m \in M$ i $n \in M^\perp$. Vektor m se zove ortogonalna projekcija od v na M.

Primjetimo da je $p(x) = \underbrace{x+1}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{(-2)x^2+1}_{\in \mathcal{L}^\perp}$ pa je

$x+1$ ortogonalna projekcija od $p(x) = -2x^2+x+1$ na $\mathcal{L}$.

(#) U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$, sa standardnim skalarnim proizvodom, zadan je podprostor M razapet vektorima $(2,1,0,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$. Nađite jednu bazu za ortogonalni komplement od M te odredite ortogonalnu projekciju vektora $a=(3,-4,5,-5)^T$ na M.

Rj:

$$M = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Trebamo odrediti bazu za $M^\perp$. Prisjetimo se

Za podskup M unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $M^\perp$ od M je definiran sa

$$M^\perp = \{x \in V \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in M\}$$

Mi tražimo $x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ t.d. $\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle = 0$ i $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$2a+b=0 \qquad\qquad a+b+c+d=0$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\end{array}$$

$\Rightarrow$ dvije promjenjive, uzimamo proizvoljno npr. $c=t$, $d=s$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+s\\-2t-2s\\t\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}s$$

ovo je baza za $M^\perp$.

Time smo dobili $M^\perp = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Prisjetimo se

Vektor m se naziva ortogonalna projekcija od v na M ako $v = m+n$ gdje je $m \in M$ i $n \in M^\perp$.

Mi imamo

$$M = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{i} \quad M^\perp = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Prvo odredimo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ t.d.

$$\begin{pmatrix}3\\-4\\5\\-5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5\end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 6, \quad \delta = -4$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Ortogonalna projekcija vektora $a = \begin{pmatrix}3\\-4\\5\\-5\end{pmatrix}$ na M je $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

(#) Neka je $M = \text{span}\{a, b\}$ podprostor unitarnog prostora $\mathbb{R}^n$ (sa standardnim skalarnim produktom) razapet (generiran) vektorima $a = (0, 1, 2, \ldots, n-1)^T$ i $b = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Odrediti njegov ortogonalni komplement $M^\perp$ te odredite ortogonalnu projekciju od z na M gdje je

$$z = \left(\frac{1}{2}n(3-n), \quad \frac{1}{2}n(n-1), 0, 0, \ldots, 0\right)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Rj.

$$M = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\\vdots\\n-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\2\\\vdots\\n-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Prisjetimo se da je prema definiciji

$$M^\perp = \{x \in V \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m \in M \subseteq V\}$$

Trebamo odrediti vektor(e) $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ takav(e) da vrijedi

$\langle a, x\rangle = 0$ i $\langle b, x\rangle = 0$ tj.

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\\\vdots\\n-1\end{pmatrix}(x_1\, x_2 \,\ldots\, x_n) = 0 \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

Drugim riječima trebamo riješiti sljedeći sistem linearnih jednadžbi:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \ldots & n-1\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0\end{array}\right] \overset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 0\end{array}\right] \overset{I-II_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c}1 & 0 & -1 & -2 & \ldots & 2-n & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & 0\end{array}\right] \Rightarrow$$ $n-2$ promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_3, x_4, \ldots, x_n$

$$x_1 = x_3 + 2x_4 + \ldots + (n-2)x_n$$

$$x_2 = -2x_3 - 3x_4 + \ldots + (1-n)x_n$$

$$M^\perp = \left\{\begin{pmatrix}x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + (n-2)x_n\\ -2x_3 - 3x_4 - 4x_5 - \ldots - (n-1)x_n\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\\0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}n-2\\-n+1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Znamo da je $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ pa je $1+2+\ldots+(n-2) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$

$\frac{1}{2}(n^2-3n+2)$

$\frac{1}{2}(n(n-3)+2)$

$$-2-3-4-\ldots-(n-1) = (-1)\left(\underset{+1-1}{2+3+4+\ldots+(n-1)}\right) = (-1)\left(\frac{1}{2}(n-1)n - 1\right) = 1 - \frac{1}{2}(n-1)n$$

Prema tome

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}n(3-n)\\ \frac{1}{2}n(n-1)\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}}_{=b\in M} \underbrace{- \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} - \ldots - \begin{pmatrix}n-2\\-n+1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in M^\perp}$$

Ortogonalna projekcija od z na M je $(1, 1, 1, \ldots, 1)^T$

(#) Odrediti ortogonalnu projekciju vektora $x=\begin{pmatrix}-12\\-13\\5\\2\end{pmatrix}$ na prostor $\mathcal{M}$ ako je

$$\mathcal{M}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$$

(s obzirom na standardni skalarni proizvod).

Rj.

Prisjetimo se definicije ortogonalne projekcije:

Za $v\in V$ neka je $v=m+n$, gdje je $m\in\mathcal{M}$ i $n\in\mathcal{M}^\perp$. Vektor m nazivamo ortogonalna projekcija od v na $\mathcal{M}$.

Prisjetimo se i definicije ortogonalnog komplementa

Za podskup $\mathcal{M}$ unitarnog prostora V ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ od $\mathcal{M}$ je definiran kao skup svih vektora u V koji su ortogonalni na svaki vektor u $\mathcal{M}$. Tj.

$$\mathcal{M}^\perp=\{x\in V \mid \langle m,x\rangle=0 \quad \forall m\in\mathcal{M}\}$$

Prvo ćemo provjeriti da li je skup $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$ linearno nezavisan.

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&-3\\2&2\\-3&4\end{bmatrix}\sim\;\dots\;\overset{\text{osnovne red operacije}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ dani skup je linearno nezavisan

Sada tražimo vektore $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ koji imaju osobinu da vrijedi

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle=0 \quad i \quad \left\langle\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\right\rangle=0.$$

Odavde slijedi

$$a-2b+2c\ 3d=0$$
$$2a-3b+2c+4d=0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&2&-3&0\\2&-3&2&4&0\end{array}\right]\sim\overset{\text{osnovne red operacije}}{\dots}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&17&0\\0&1&-2&10&0\end{array}\right]\end{array}$$

$\Rightarrow$ dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c=t$, $d=s$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-17s\\2t-10s\\t\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-17\\-10\\0\\1\end{pmatrix}s$$

Prema tome $\mathcal{M}^\perp=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-17\\-10\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Sad nije teško primjetiti da vrijedi

$$\begin{pmatrix}-12\\-13\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-17\\-10\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ortogonalna projekcija vektora $x=\begin{pmatrix}-12\\-13\\5\\2\end{pmatrix}$ na prostor $\mathcal{M}$ je $\begin{pmatrix}3\\-5\\4\\1\end{pmatrix}$.

(#) U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3 = \{at^3+bt^2+ct+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena ≤ 3 sa unutrašnjim proizvodom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t) q(t)\, dt$$

dan je potprostor $\mathcal{M} = \text{span}\{t, 1+t\}$. Odrediti ortogonalnu projekciju polinoma $r(t) = -5t^3 - 12t^2 + 6t + 6$ na potprostor $\mathcal{M}$.

R: Da bi odredili ortogonalnu projekciju na $\mathcal{M}$, potrebno je prvo pronaći baza za $\mathcal{M}^\perp$.

$$\underline{\mathcal{M}^\perp = \{h \in \mathcal{P}_3 \mid \langle h, p \rangle = 0,\ p \in \mathcal{M}\}}$$

Pa neka je $h(t) = at^3+bt^2+ct+d$. Odredimo koeficijente a, b, c, d tako da $\langle h, p_1 \rangle = 0$ i $\langle h, p_2 \rangle = 0$ gdje su $p_1(t) = t$, $p_2(t) = 1+t$.

$$\langle h, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (at^3+bt^2+ct+d) \cdot t\, dt = \ldots = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c$$

$$\langle h, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (at^3+bt^2+ct+d)(1+t)\, dt = \ldots = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c + 2d$$

Rješimo sad sistem

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c + 2d &= 0 \\ \frac{2}{5}a \qquad\quad + \frac{2}{3}c \qquad &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $c = s$, $d = u$, $s, u \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3}s \\ -3u \\ s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad s, u \in \mathbb{R}$$

Time smo dobili da je $\mathcal{M}^\perp = \text{span}\{-\frac{5}{3}t^3 + t, -3t^2 + 1\}$

Sad nije teško vidjeti da je

$$\underbrace{1 \cdot t + 2(1+t)}_{\in \mathcal{M}} + \overbrace{3 \cdot \left(-\frac{5}{3}t^3 + t\right) + 4\left(-3t^2 + 1\right)}^{\in \mathcal{M}^\perp} = -5t^3 - 12t^2 + 6t + 6$$

na osnovu čega možemo zaključiti da je ortogonalna projekcija $q(t)$ datog polinoma $r(t)$ na podprostor $\mathcal{M}$

$$q(t) = 2 + 3t.$$

(#) Prostor $\mathcal{L}$ je zadan kao skup rješenja sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Prikažite vektor $x=(7,-4,-1,2)$ u obliku $x=y+z$, pri čemu je $y\in\mathcal{L}$, a z iz ortogonalnog komplementa od $\mathcal{L}$ u $\mathbb{R}^4$.

Rj. Riješimo dati sistem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

dvije promj. uzimamo proizv. npr. $x_3=s$, $x_4=t$.

Rješenje sistema je

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5t \\ -s+7t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \quad s,t\in\mathbb{R}$$

Prema tome $\mathcal{L} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Prisjetimo se

Za podskup M unitarnog prostora V ortogonalni komplement od M definišemo sa

$$M^\perp = \{ x\in V \mid \langle m, x\rangle = 0 \text{ za } \forall m\in M \}$$

Iz definicije vidimo da trebamo odrediti vektore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ za koje vrijedi

$$\begin{aligned} -5x_1 + 7x_2 \quad + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dvije promjenjive uzimamo proizv. npr. $x_3 = 5s$, $x_4 = 5t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7s+t \\ 5s \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} t$$

Prema tome $\mathcal{L}^\perp = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Ostalo je još da odredimo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ za koje vrijedi

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

i za vježbu

$$\alpha = -1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = \frac{1}{5}, \quad \delta = \frac{3}{5}$$

$$y = (-1)\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$$

$$z = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^\top$$

Prema tome

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{z}$$

traženo rješenje

(#) Odrediti svojstvene vrijednosti, svojstvene prostore, te algebarske i geometrijske višestrukosti matrice A, pri čemu je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rj: Prisjetimo se:

Svojstvena vrijednost matrice A je skalar λ takav da je $Av=\lambda v$ za neki nenul vektor $v\in\mathbb{R}^n$.

$$Av=\lambda v$$
$$Av-\lambda v=0$$
$$(A-\lambda I)v=0 \Rightarrow \det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{I_k+(II_k+III_k+IV_k)} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 1-\lambda & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 1-\lambda & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[IV_v-I_v]{II_v-I_v,\ III_v-I_v} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda & -4 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{II_v-III_v} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -(1-\lambda) \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{II_k+III_k} (1-\lambda)^2\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)^2(1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=-1$ i $\lambda_2=1$.

Prisjetimo se:

Karakteristični polinom matrice $A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ je $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$. Algebarska višestrukost od λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ pojavljuje kao korijen karakterističnog polinoma matrice A.

Algebarska višestrukost od $\lambda_1=-1$ je 2, a algebarska višestrukost od $\lambda_2=1$ je 2.

Vektorski prostor $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A-\lambda I) := \{x \mid (A-\lambda I)x=0\}$ se naziva svojstveni prostor matrice A.

Odredimo svojstvene vektore matrice A.

$\lambda_1=-1$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ 1 prom. uzimamo proizv.

$$v=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s\in\mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\lambda_2=1$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$ 1 prom. uzim. proizv.

$$v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\s\\s\\s\end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad \mathcal{E}_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Traženi svojstveni prostori su $\mathcal{E}_{-1}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ i $\mathcal{E}_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Na kraju prisjetimo se:

Geometrijska višestrukost od λ je $\dim\ker(A-\lambda I)$. Tj. $\dim(\mathcal{E}_\lambda)$.

Geometrijske višestrukosti za obe svojstvene vrijednosti iznosi 1.

Data je matrica

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1&0\\1&-1&0&1\\0&0&1&0\\1&b&0&1\end{pmatrix}.$$

Odrediti parametre a i b ako je poznato da je A singularna matrica čije sve svojstvene vrijednosti imaju algebarsku višestrukost 2.

Rj.

Znamo da matrica A je singularna ako joj je determinanta jednaka 0.

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&a&1&0\\1&-1&0&1\\0&0&1&0\\1&b&0&1\end{vmatrix}\overset{\text{razvoj po trećoj vrsti}}{=}\begin{vmatrix}1&a&0\\1&-1&1\\1&b&1\end{vmatrix}\overset{II_v-III_v}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&-1-b&0\\1&b&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a\\0&-1-b\end{vmatrix}=-1-b\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}-1-b&=0\\b&=-1\end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1&0\\1&-1&0&1\\0&0&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

Višestrukost

Neka je $\sigma(A)$ skup svih (različitih) svojstvenih vrijednosti matrice A, i neka je $\lambda\in\sigma(A)$. Algebarska višestrukost od λ je broj koji predstavlja koliko se puta λ ponavlja kao korijen karakterističnog polinoma matrice A. Geometrijska višestrukost od λ je $\dim\ker(A-\lambda I)$.

Znamo da

$$\lambda\in\sigma(A)\iff A-\lambda I \text{ singularna}\iff \det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-1)(\lambda^3-\lambda^2-\lambda a)$$

$$= (\lambda-1)\lambda(\lambda^2-\lambda-a)$$

Odavde vidimo da su dvije svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1=1$ i $\lambda_2=0$. Kako sve svojstvene vrijednosti imaju algebarsku višestrukost 2 to je $a=0$.

$$\lambda^2-\lambda-a \overset{a=0}{=} \lambda^2-\lambda = \lambda(\lambda-1)$$

Vrijednosti parametara a i b su

$$a=0, \qquad b=-1.$$